Feuille d'exercices 4

Exercice 1. Existe-t-il une fonction analytique f définie sur un ouvert connexe U contenant 0 qui vérifie : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} \in U$,

a. $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = f\left(\dfrac{1}{2n+1}\right) = \dfrac{1}{n}$

b. $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = f\left(-\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n^2}$

Exercice 2. Montrer que la série entière

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \left(z + \frac{1}{2}\right)^n$$

est une prolongement analytiques de la série entière

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

Déterminer les disques de convergence des deux séries et les tracer dans le plan complexe.

Exercice 3. Soit f une fonction analytique sur un ouvert connexe U de $\mathbb{C}$. Montrer :

a. Si f' est identiquement nulle sur U, alors f est constante sur U.

b. Si pour tout point z de U on a $f(z) = 0$ ou $f'(z) = 0$, alors f est constante sur U.

Exercice 4.

a. Montrer que la fonction $f(z) = \overline{z}$ n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{C}$.

b. Conclure que f n'est analytique en aucun point de $\mathbb{C}$.

Exercice 5. Soit f une fonction analytique sur un ouvert U de $\mathbb{C}$. Montrer que si f n'est pas constante au voisinage de $z_0 \in U$, alors il existe un voisinage V de z_0 sur lequel on a : si $z \in V$ et $f(z) = f(z_0)$, alors $z = z_0$.