Feuille d'exercices 5

Exercice 1. Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ ne contenant pas 0. On suppose que f est une fonction analytique sur U, qu'elle vérifie, pour tout z de U,

$$f'(z) = \frac{1}{z}$$

et qu'il existe $z_0 \in U$ tel que

$$\exp(f(z_0)) = z_0.$$

Montrer que f est une détermination du logarithme. (*Piste : considérer* $g(z) = \frac{\exp(f(z))}{z}$.)

Exercice 2.

a. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}$$

b. Montrer que $\sin(z) = 0$ ssi $z = k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

c. Montrer que $\cos(z) = 0$ ssi $z = k\frac{\pi}{2}$ où $k \in \mathbb{Z}$.

d. Montrer que $\sin'(z) = \cos(z)$ et $\cos'(z) = -\sin(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 3. Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont holomorphes sur $\mathbb{C}$?

a. $x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$

b. $x\sin(x) + iy\sin(x)$

c. $e^y \sin(x) - ie^y \cos(x)$

d. $x^3 + y^2x + x^2 - y^2 + i(x^3 + y^2x + x^2 - y^2)$

Exercice 4. Trouver toutes les fonctions holomorphes $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telles que :

$$\text{Ré}\,(f(x+iy)) = 2xy$$

Exercice 5. Soit f une fonction définie sur un ouvert connexe U de $\mathbb{C}$ et soit $\overline{f}$ la fonction définie par $\overline{f}(z) = \overline{f(z)}$ pour tout $z \in U$. Si f est $\overline{f}$ sont holomorphes, alors f est constante.