Feuille d'exercices 6

Exercice 1. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une function holomorphe sur un ouvert connexe U de $\mathbb{C}$. Soit $g : V \to U$ une function holomorphe non-constante sur un ouvert V de $\mathbb{C}$. Si $(f \circ g)(z) = 0$ pour tous $z \in V$, alors $f = 0$ sur U.

Exercice 2. Soit f une fonction holomorphe et non-constante sur un ouvert connexe U de $\mathbb{C}$. Si l'image $f(U)$ est contenue dans $\{w \in \mathbb{C} : |w| \leq r\}$, alors elle est en fait contenue dans $\{w \in \mathbb{C} : |w| < r\}$.

Exercice 3. Soit α un nombre réel. Montrer que $|e^{i2\alpha\pi} - 1| \leq 2\pi|\alpha|$. (*Piste : Intégrer* $e^{i\alpha t}$.)

Exercice 4. Soient f et g deux fonctions holomorphe sur un ouvert U contenant le disque fermé $\overline{D}(z_0, r)$ de centre z_0 et de rayon r. Si $f(z) = g(z)$ pour tous $z \in C(z_0, r)$, alors $f(z) = g(z)$ sur le disque $\overline{D}(z_0, r)$.

Exercice 5. Soit $f(x + iy) = xy + i(x + y)$. Evaluer l'intégrale $\int_\gamma f(z)\, dz$ où γ est le bord du triangle avec sommets 0, 1, $1 + i$ parcouru dans le sens antihoraire.

Exercice 6. Calculer $\displaystyle\int_\gamma \overline{z}\, dz$ sur les deux cercles : (a) $|z| = 1$; (b) $|z - 1| = 1$.

Exercice 7. En calculant l'intégrale $\displaystyle\int_\gamma e^z\, dz$ où γ est le cercle $|z| = 1$, montrer que

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos(t)} \cos(t + \sin(t))\, dt = 0 \qquad \text{et} \qquad \int_0^{2\pi} e^{\cos(t)} \sin(t + \sin(t))\, dt = 0$$