Feuille d'exercices 7

Exercice 1. Dessiner les chemins suivants et calculer leurs longueurs.

a. $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ défini par $\alpha(t) = t - ie^{-it}$.

b. $\beta : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ défini par $\beta(t) = te^{it}$.

Exercice 2. Soit A, B, C trois points du plan complexe. Trouver un homotopie entre le segment $[A, C]$ et la ligne comprenant les segments $[A, B]$ et $[B, C]$.

Exercice 3. Dessiner les chemins suivants et évaluer les intégrales. (*Piste. Toutes ces intégrales peuvent être évaluées sans un calcul explicite.*)

a. $\displaystyle\int_\alpha z\,dz$ où $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ est le chemin $\alpha(t) = \cos(t) + 2i\sin(t)$.

b. $\displaystyle\int_\beta \frac{1}{z^2}\,dz$ où $\beta : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ est le chemin $\beta(t) = \cos(t) + 2i\sin(t)$.

c. $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{z}\,dz$ où $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ est le chemin $\gamma(t) = 2 + e^{it}$.

d. $\displaystyle\int_\delta \frac{1}{z^2 - 1}\,dz$ où δ est le cercle de centre 1 et rayon 1.

Exercice 4. Montrer que la fonction $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - z}$ n'a pas de primitive sur l'ouvert $U = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - 1| < 1\}$.

Exercice 5. Soit f est un fonction analytique sur un ouvert U contenant un lacet simple γ et son intérieur. Supposons z_0 n'appartient pas au chemin γ. Montrer que

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{z - z_0}\,dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^2}\,dz.$$

Exercice 6. Évaluer l'intégrale

$$\int_{C(0,2)} \frac{e^z}{(z^2+1)^2}\,dz$$

$\Big($*Piste. Tout d'abord, montrer que* $\int_{C(0,2)} \frac{e^z}{(z^2+1)^2}\,dz = \int_{C(-i,\frac{1}{2})} \frac{e^z}{(z^2+1)^2}\,dz + \int_{C(i,\frac{1}{2})} \frac{e^z}{(z^2+1)^2}\,dz\Big)$

Exercice 7. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ et soit $z_0 \in U$. On définit la fonction $g : U \to \mathbb{C}$ par

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} & \text{si } z \neq z_0 \\[2ex] f'(z_0) & \text{si } z = z_0 \end{cases}$$

Montrer que g est holomorphe sur U.