Feuille d'exercices 8

Exercice 1. En donnant une homotopie explicite, montrer que les cercles $C(0,2)$ et $C(0,3)$ sont homotopes dans $U = \{z : 1 < |z| < 4\}$.

Exercice 2. Soit $\gamma : [0, 4\pi] \to \mathbb{C}$ le chemin défini par $\gamma(t) = \cos(t) + i3\sin(t)$. Montrer que $\mathrm{Ind}_\gamma(0) = 2$.

Exercice 3. Évaluer l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos^2 t + 9\sin^2 t}\, dt$$

(*Piste : calculer l'indice de l'origine par rapport à* $\gamma(t) = \cos t + i3\sin t$.)

Exercice 4. Soit U un ouvert simplement connexe contenant le cercle $C(z_0, r)$.

a. Soit w un point qui n'appartient pas à U. Calculer l'indice de w par rapport au chemin correspondant au cercle $C(z_0, r)$.

b. En deduire que U contient tout le disque fermé $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$.

Exercice 5. Soit f une fonction continue sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ et soit $z_0 \in U$. Si f est holomorphe sur $U \backslash \{z_0\}$, alors f est holomorphe sur U.

> *Piste. Considérer un triangle (ou rectangle) dans un voisinage de* z_0*. Il y a deux cas : le cas où* z_0 *appartient au triangle ; et le cas où* z_0 *n'appartient pas au triangle. Décomposer les triangles en petits triangles et appliquer le théorème de Cauchy et l'estimation standard. Conclure à l'aide du théorème de Morera.*