Feuille d'exercices 9

Exercice 1. Trouver les développements en série de Laurent de la fonctions

$$f(z) = \frac{1}{z(1-z)(2-z)}$$

sur les anneaux suivants.

a. $0 < |z| < 1$ *b.* $1 < |z| < 2$ *c.* $2 < |z|$

Exercice 2. Trouver les développements en série de Laurent de la fonctions

$$g(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} + \frac{1}{2-z}$$

sur les anneaux suivants.

a. $0 < |z| < 1$ *b.* $0 < |z-1| < 1$ *c.* $0 < |z-2| < 1$

Exercice 3. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur un ouvert U. On dit que $z_0 \in U$ est un *zéro d'ordre* m *de la fonction* f si le développement en série de Taylor de f à z_0 vérifie

$$f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$$

où $a_m \neq 0$.

a. Montrer que z_0 est un zéro d'ordre m de f ssi il existe un fonction g holomorphe sur un voisinage de z_0 tel que $g(z_0) \neq 0$ et $f(z) = (z-z_0)^m g(z)$.

b. Supposons que f soit non-constante et que z_0 soit un zéro d'ordre m de f. Alors, les zéros de f sont isolés. Soit $\varepsilon > 0$ tel que f ne s'annule pas sur le disque fermé de centre z_0 et rayon ε. Montrer que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0,\varepsilon)} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = m$$

Exercice 4. Soit f et g deux fonctions holomorphe sur le disque unité $D(0,1)$, et soit $C(0,r)$ le circle de centre 0 et rayon r.

a. Soit r un nombre réel arbitraire tel que $|z| < r < 1$. Montrer que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,r)} \frac{f(w)}{w}\, g\left(\frac{z}{w}\right) dw = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$$

où $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ sont les séries de Taylor de f et g, respectivement.

b. Pour $|z| < 1$, on définit

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,r)} \frac{f(w)}{w}\, g\left(\frac{z}{w}\right) dw$$

où r est un nombre réel arbitraire tel que $|z| < r < 1$. En deduire que h est une fonction analytique sur le disque $D(0,1)$.

c. Montrer ou fournir un contre-exemple : si $f(z) \neq 0$ et $g(z) \neq 0$ pour tout $|z| < 1$, alors $h(z) \neq 0$ pour tout $|z| < 1$.