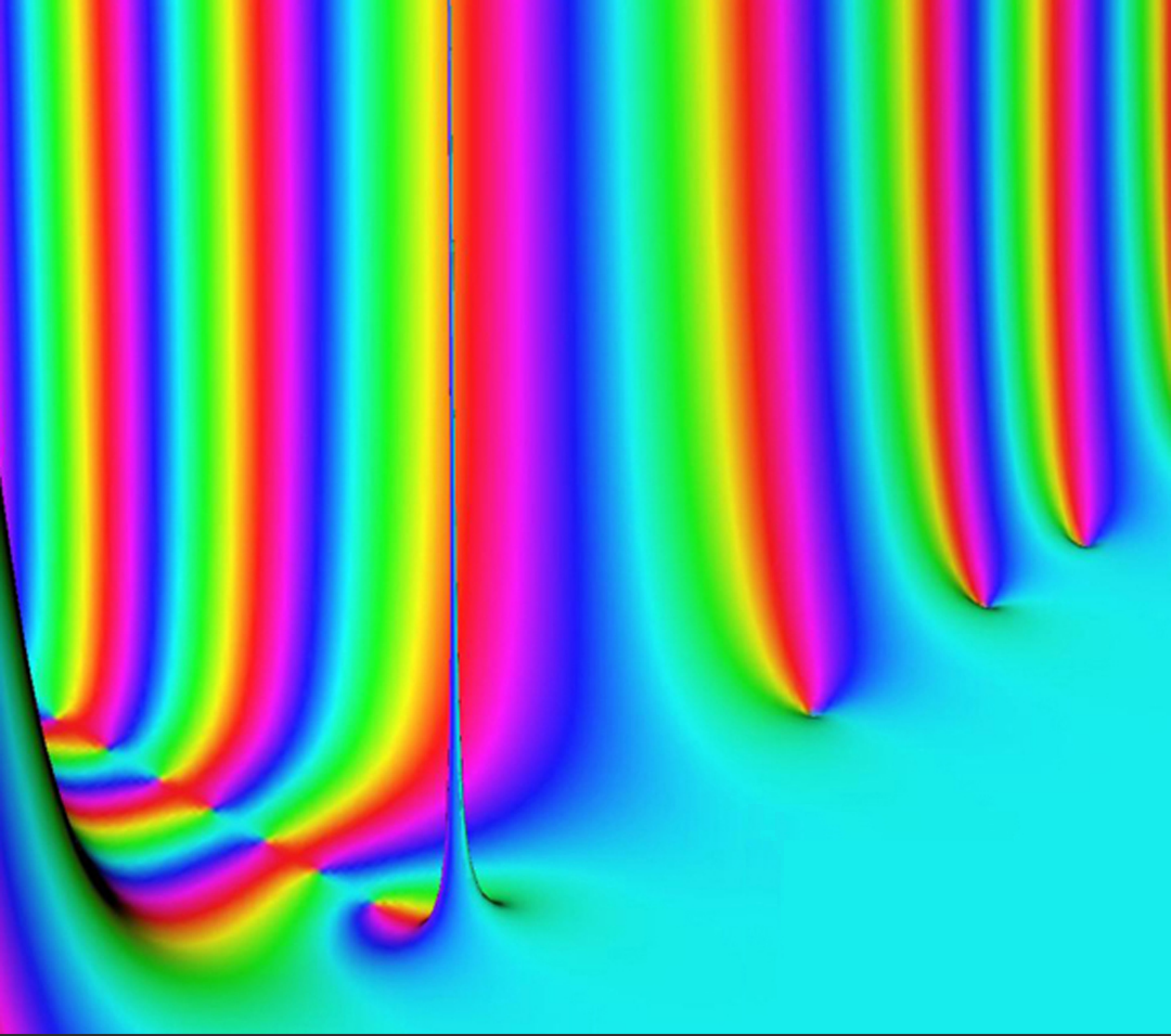


Visualisation colorée des fonctions d'une variable complexe

Gilbert Labelle, UQÀM

RÉSUMÉ

Visualisation colorée des fonctions d'une variable complexe

Nous présentons une façon tridimensionnelle colorée pour visualiser à l'aide de l'ordinateur les fonctions $f(z)$ d'une variable complexe $z = x+iy$.

Les quatre variables réelles x, y, u, v, liées par la relation

$$u+iv = f(x+iy),$$

sont remplacées par le point de l'espace à 3 dimensions

$$(x, y, \text{module}(f(z))) \text{ colorié}$$

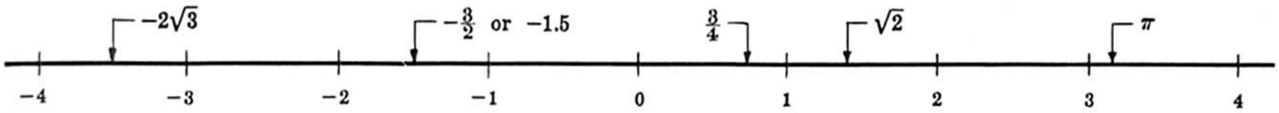
par une couleur de l'arc-en-ciel correspondant à l'argument du nombre complexe $f(z)$.

Cette façon de représenter les fonctions complexes possède l'avantage de permettre de visualiser en un simple coup d'oeil les racines, pôles, valeurs prises, etc de la fonction $f(z)$.

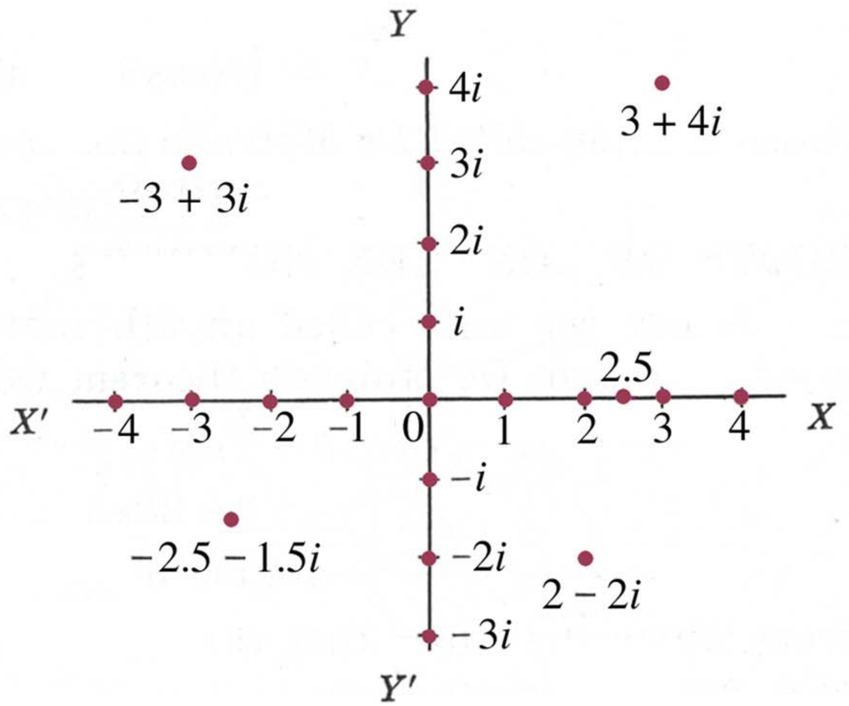
Nous illustrons la technique à l'aide du logiciel MAPLE en analysant divers types de fonctions: polynômes, fonctions trigonométriques, exponentielles, etc ainsi que quelques fonctions spéciales plus élaborées incluant les fonctions gamma d'Euler et zêta de Riemann.

NOMBRES RÉELS ET COMPLEXES

Nombres réels :



Nombres complexes :



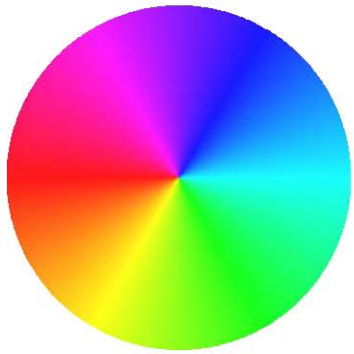
$$z = x + yi$$

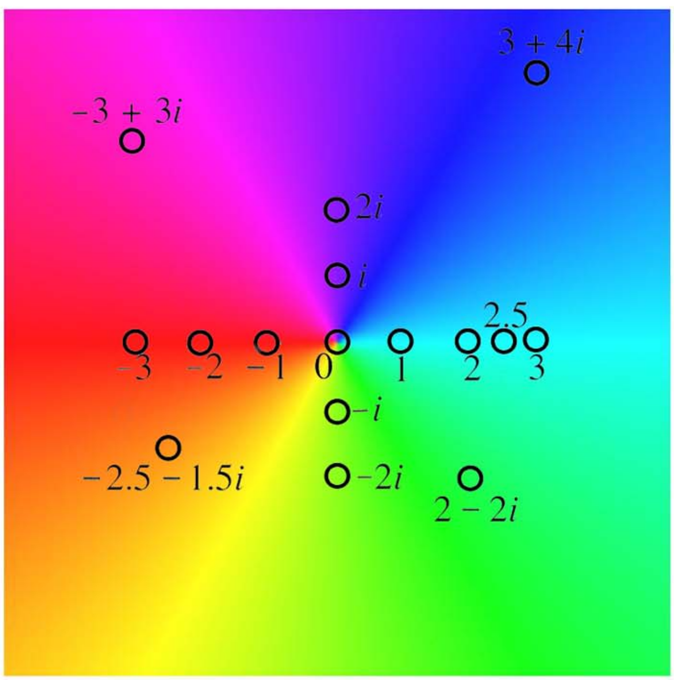
x = partie réelle de z

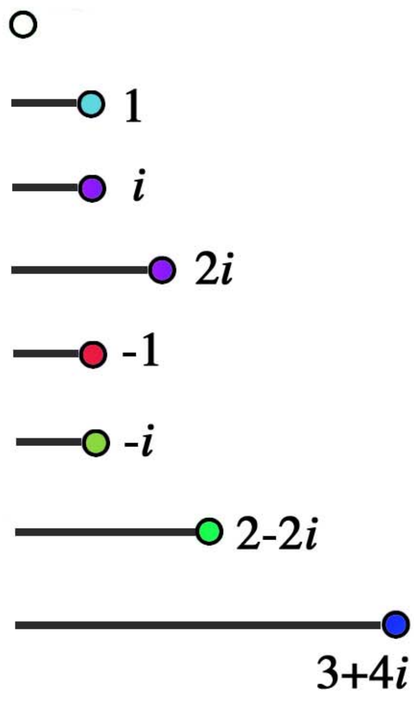
y = partie imaginaire de z

$$i^2 = -1$$

ROUE DES COULEURS





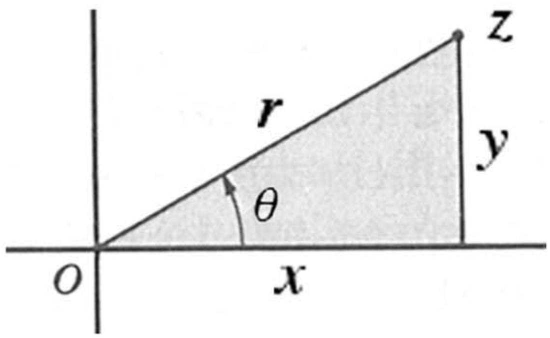


Nombre complexe = baguette magique à bout coloré

Longueur de la baguette : module du nombre complexe

Couleur du bout : argument du nombre complexe selon la roue des couleurs

OPÉRATIONS COMPLEXES



$$z = x + yi$$

forme cartésienne

$$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

forme polaire

$x = \mathrm{Re}(z) =$ partie réelle de z
$y = \mathrm{Im}(z) =$ partie imaginaire de z

$r = |z| =$ module de z
$\theta =$ argument de z

$$i^2 = -1$$

$$\begin{aligned}
(a+bi)+(c+di) &= (a+c)+(b+d)i \\
(a+bi)-(c+di) &= (a-c)+(b-d)i \\
(a+bi)(c+di) &= (ac-bd)+(ad+bc)i \\
\frac{a+bi}{c+di} &= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i
\end{aligned}$$

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), \quad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$\begin{aligned}
z_1 z_2 &= r_1 r_2 \{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\} \\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\}
\end{aligned}$$

PROLONGEMENT ANALYTIQUE

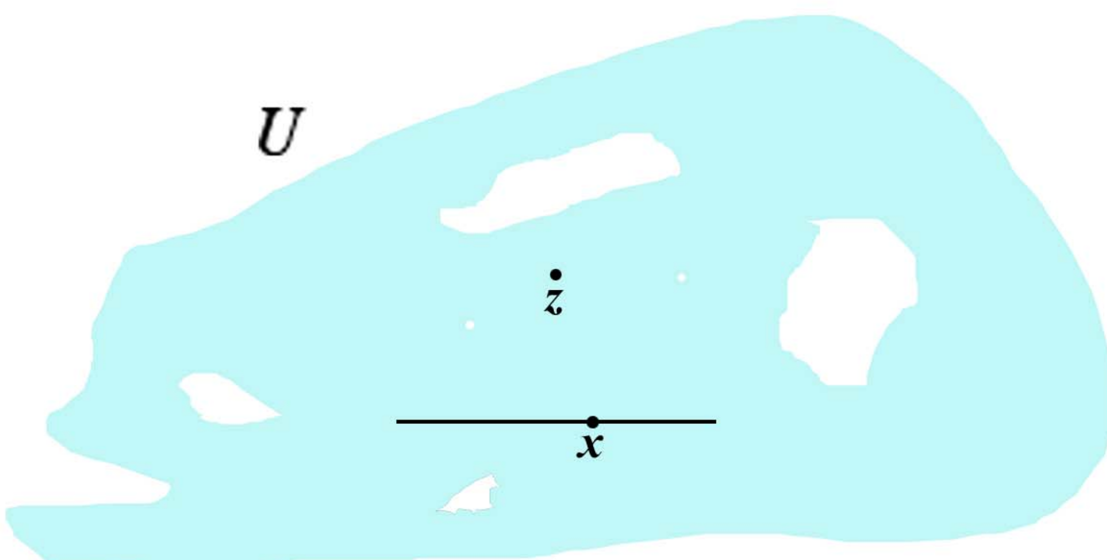
Une *série de puissances en a* est une expression de la forme

$$c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + c_3(z-a)^3 + \cdots$$

Une fonction f (réelle ou complexe) est *analytique* si, pour chaque point a de son domaine, il existe une série de puissances en a qui converge vers f dans un voisinage de a.

PRINCIPE DU PROLONGEMENT ANALYTIQUE

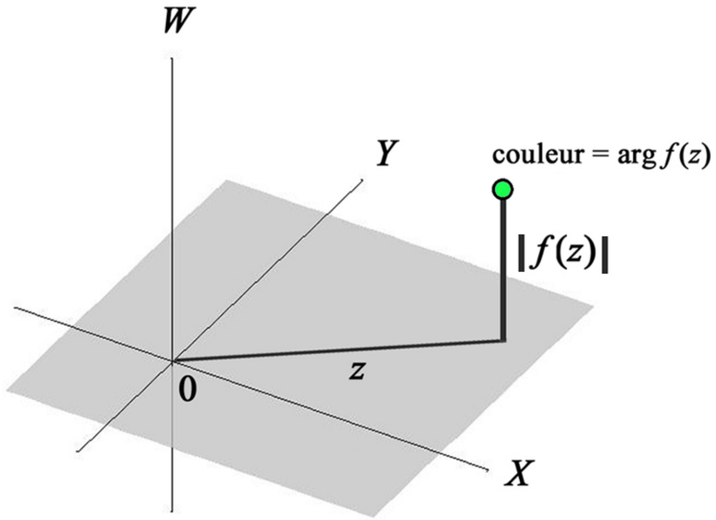
Si $f(x)$ est une fonction analytique sur un intervalle réel non vide et si U est un ouvert connexe du plan complexe contenant cet intervalle, alors il existe, au plus, une fonction analytique $F(z)$ sur U qui prolonge $f(x)$.



REPRÉSENTATIONS DE w = f(z)

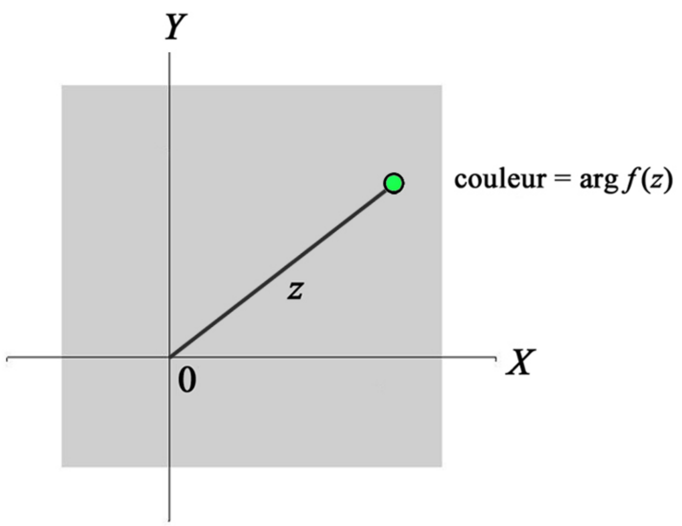
En 3 dimensions :

À chaque z appartenant au domaine de f, on attache perpendiculairement la baguette magique qui représente $w = f(z)$.

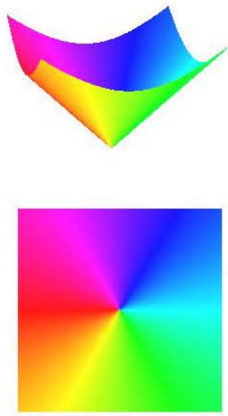


En 2 dimensions : (vue d'en haut)

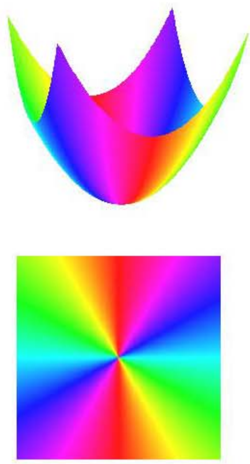
Chaque z appartenant au domaine de f, est colorié par la couleur arg $f(z)$.



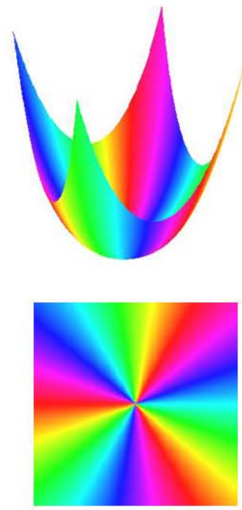
PUISSANCES DE z



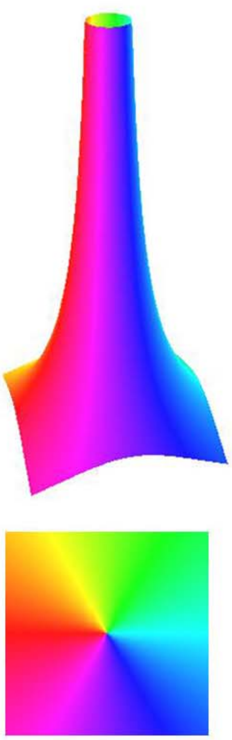
$f(z) = z$



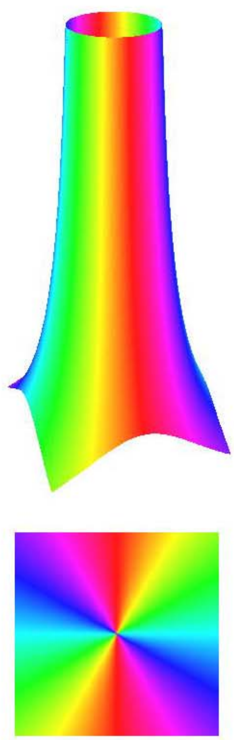
$f(z) = z^2$



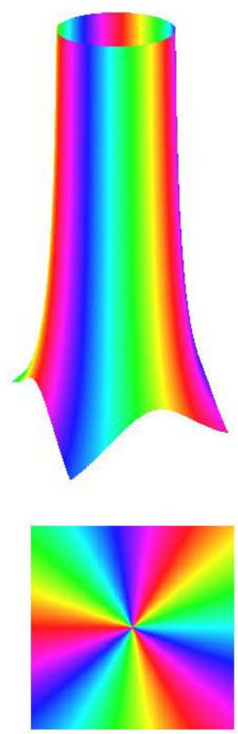
$f(z) = z^3$



$f(z) = 1/z$



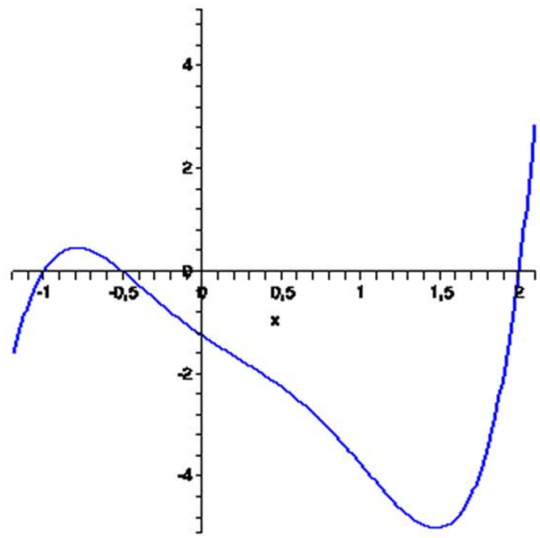
$f(z) = 1/z^2$



$f(z) = 1/z^3$

POLYNÔMES RÉELS

$$p(x) = x^5 - \frac{3}{4}x^4 - \frac{3}{4}x^3 + \frac{7}{8}x^2 - \frac{17}{8}x - \frac{5}{4}$$



$p(x)$ s'annule pour $x = -1$, $x = -1/2$, $x = 2$.

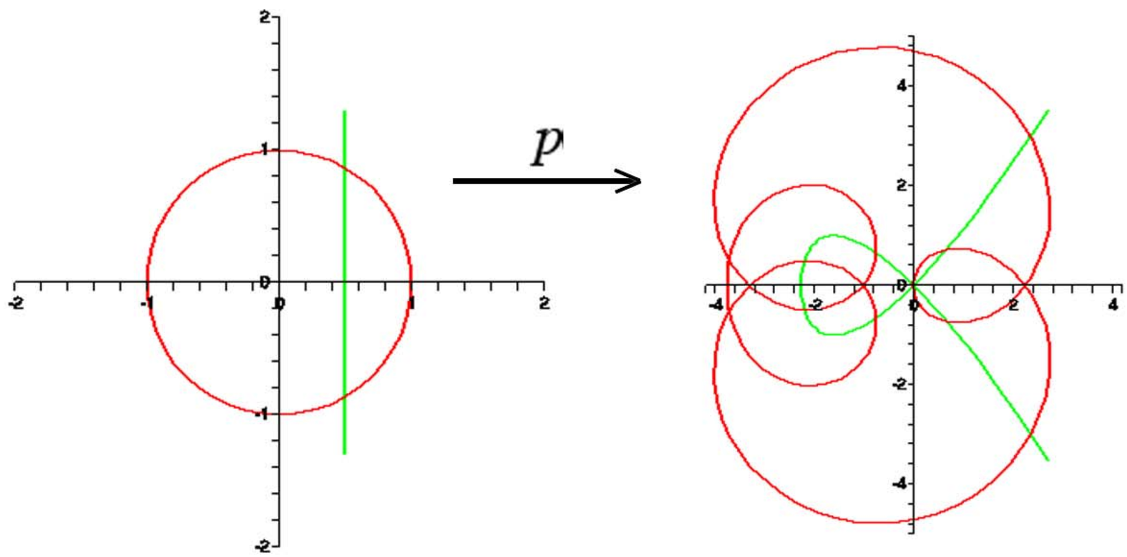
$$p(x) = (x+1)(x+\frac{1}{2})(x-2)(x^2 - x + \frac{5}{4})$$

Si $z = x + iy$, **alors**

$$p(z) = z^5 - \frac{3}{4}z^4 - \frac{3}{4}z^3 + \frac{7}{8}z^2 - \frac{17}{8}z - \frac{5}{4} = \textbf{???}$$

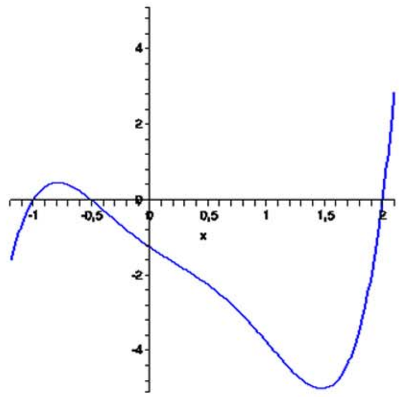
POLYNÔMES COMPLEXES

$$p(z) = z^5 - \frac{3}{4}z^4 - \frac{3}{4}z^3 + \frac{7}{8}z^2 - \frac{17}{8}z - \frac{5}{4}$$

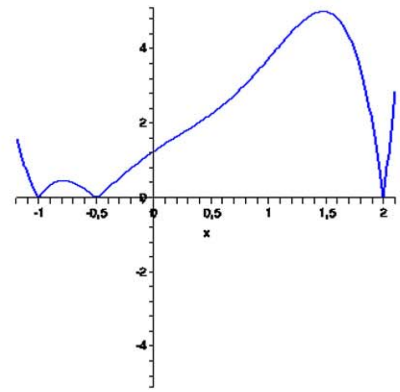


$$p(z) = (z+1)(z+\tfrac{1}{2})(z-2)(z-?)(z-?)$$

POLYNÔMES COMPLEXES
suite

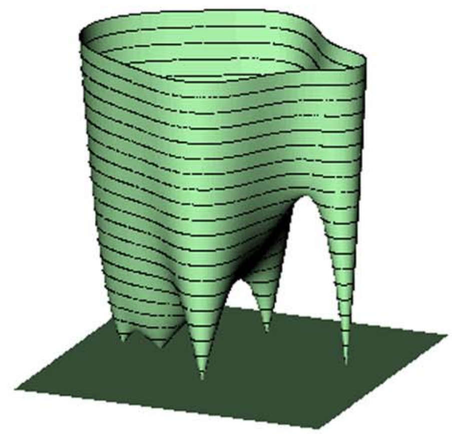


Graphe de $p(x)$

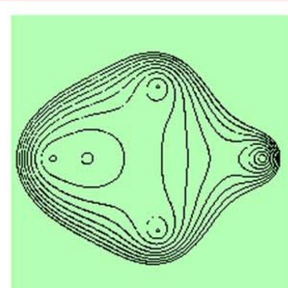


Graphe de $|p(x)|$

Graphe de $|p(z)|$



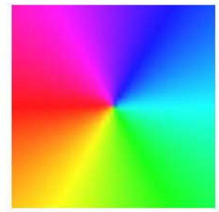
Courbes de niveau de $|p(z)|$

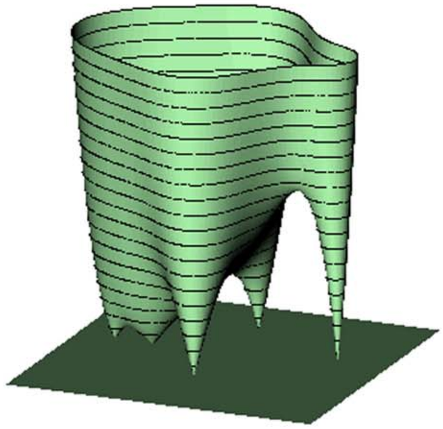


$$p(z) = (z+1)(z+\tfrac{1}{2})(z-2)(z-(\tfrac{1}{2}+i))(z-(\tfrac{1}{2}-i))$$

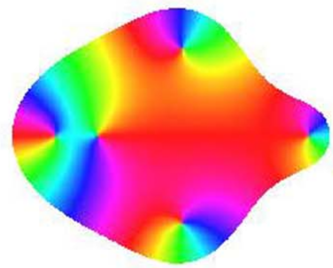
POLYNÔMES COMPLEXES
suite 2

Roue des couleurs de arg(z)

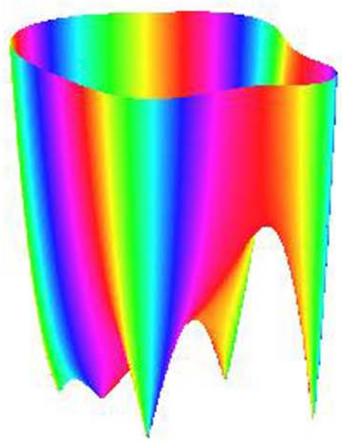




Graphe de $|p(z)|$



Graphe de $\arg p(z)$

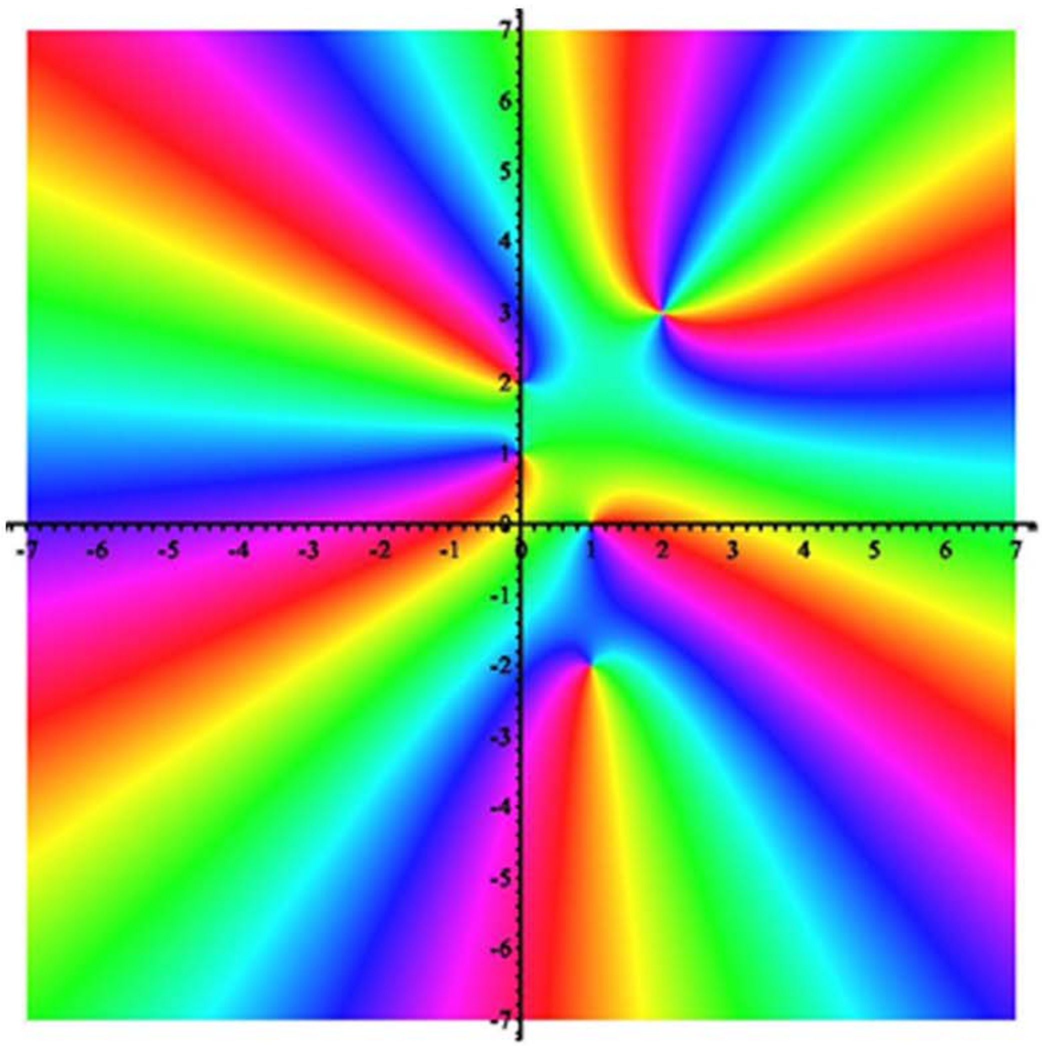


Graphe de $p(z)$

$$p(z) = (z+1)(z+\tfrac{1}{2})(z-2)(z-(\tfrac{1}{2}+i))(z-(\tfrac{1}{2}-i))$$

THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ALGÈBRE

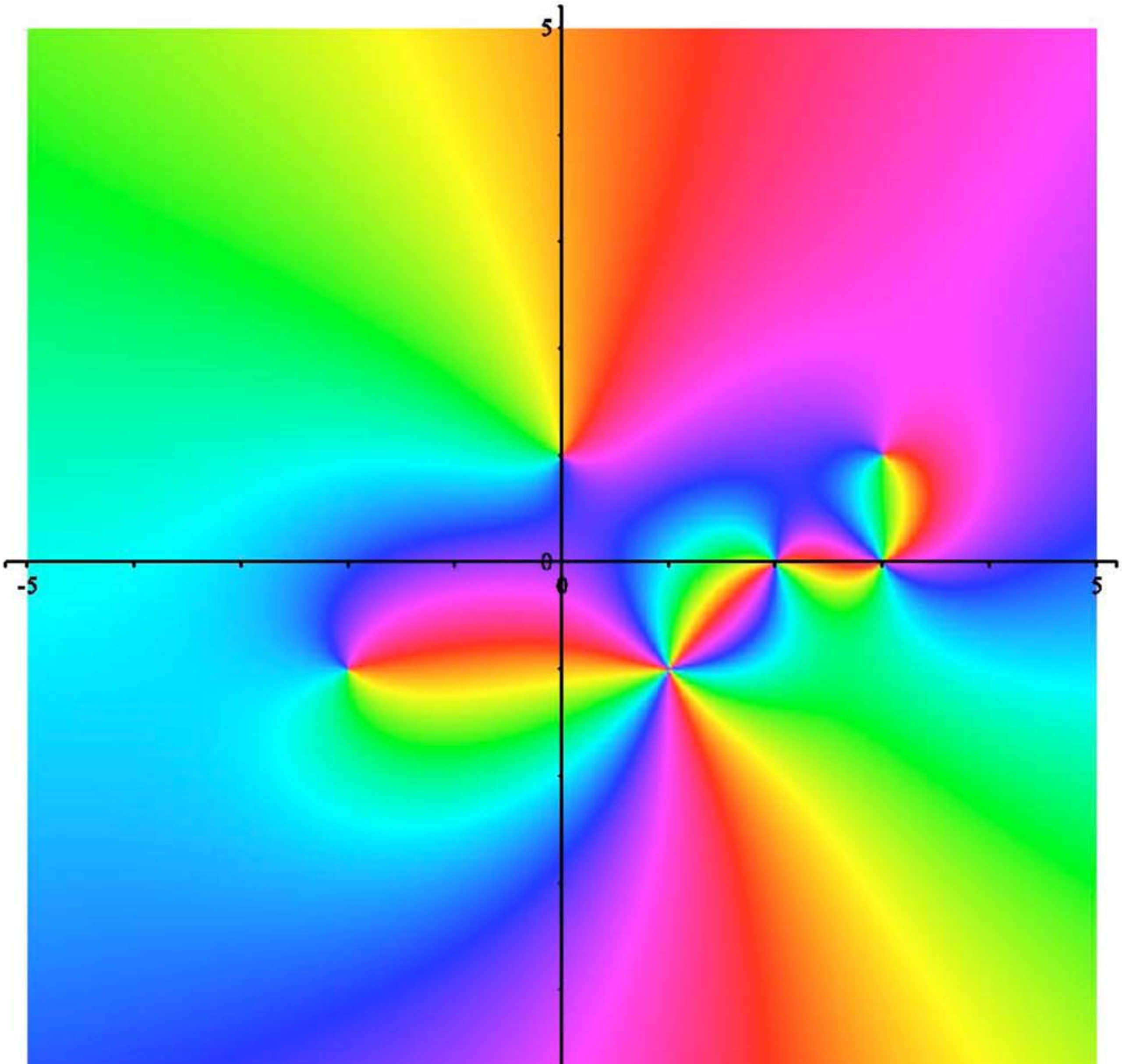
$$p(z) = (2+i)z^6 + (-5-20i)z^5 + (-28+66i)z^4 + (120-120i)z^3 + (-302+59i)z^2 + (245+140i)z + (-32-126i)$$



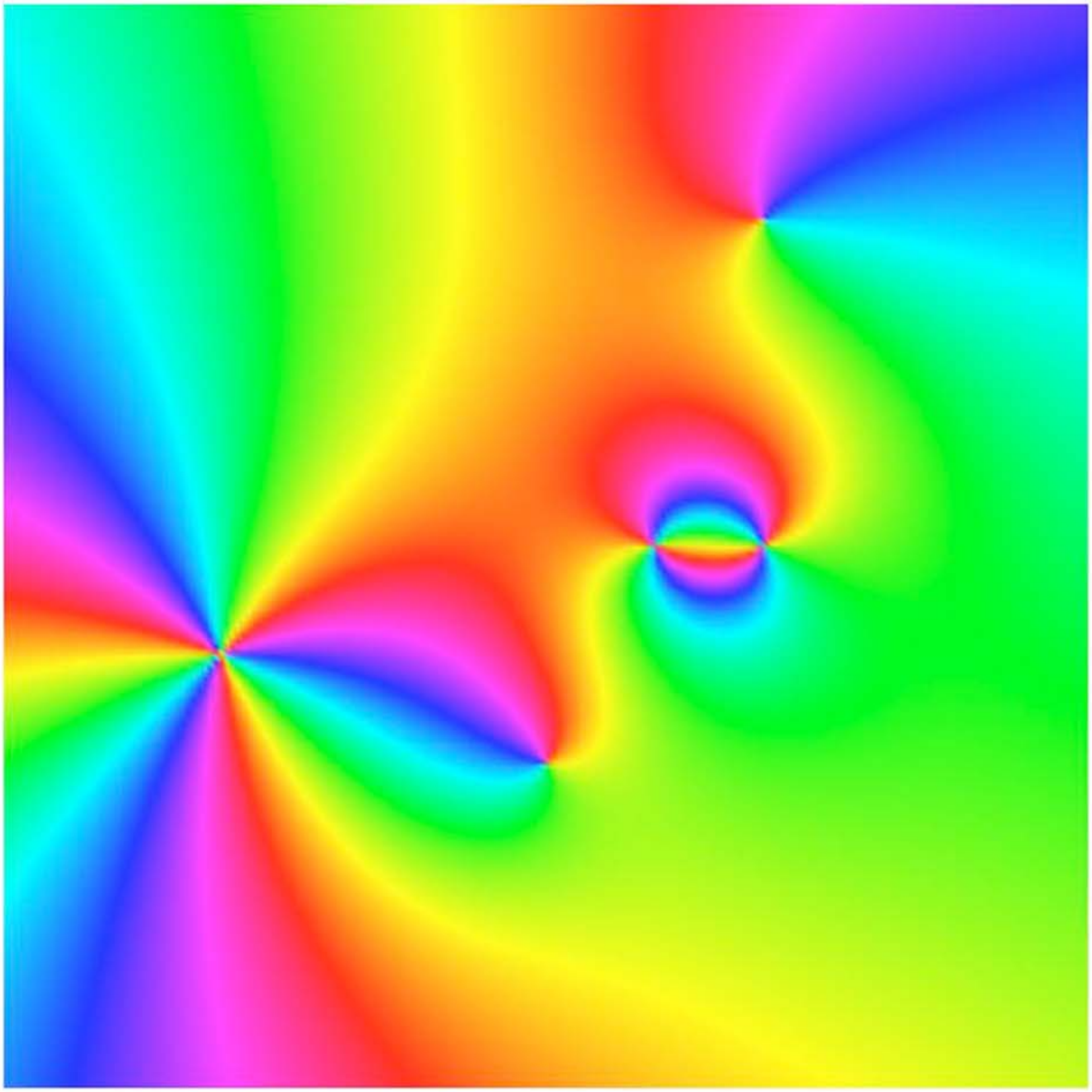
$$p(z) = (2+i)\,(z-1)\,(z-i)\,(z-(1-2i))\,(z-2i)\,(z-(2+3i))^2$$

FONCTIONS RATIONNELLES

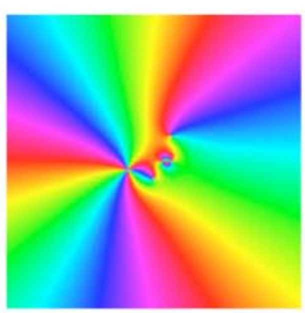
$$f(z)=\frac{(z-3)^2(z-i)(z-(1-i))^3}{(z-2)^2(z-(3+i))(z-(-2-i))}$$



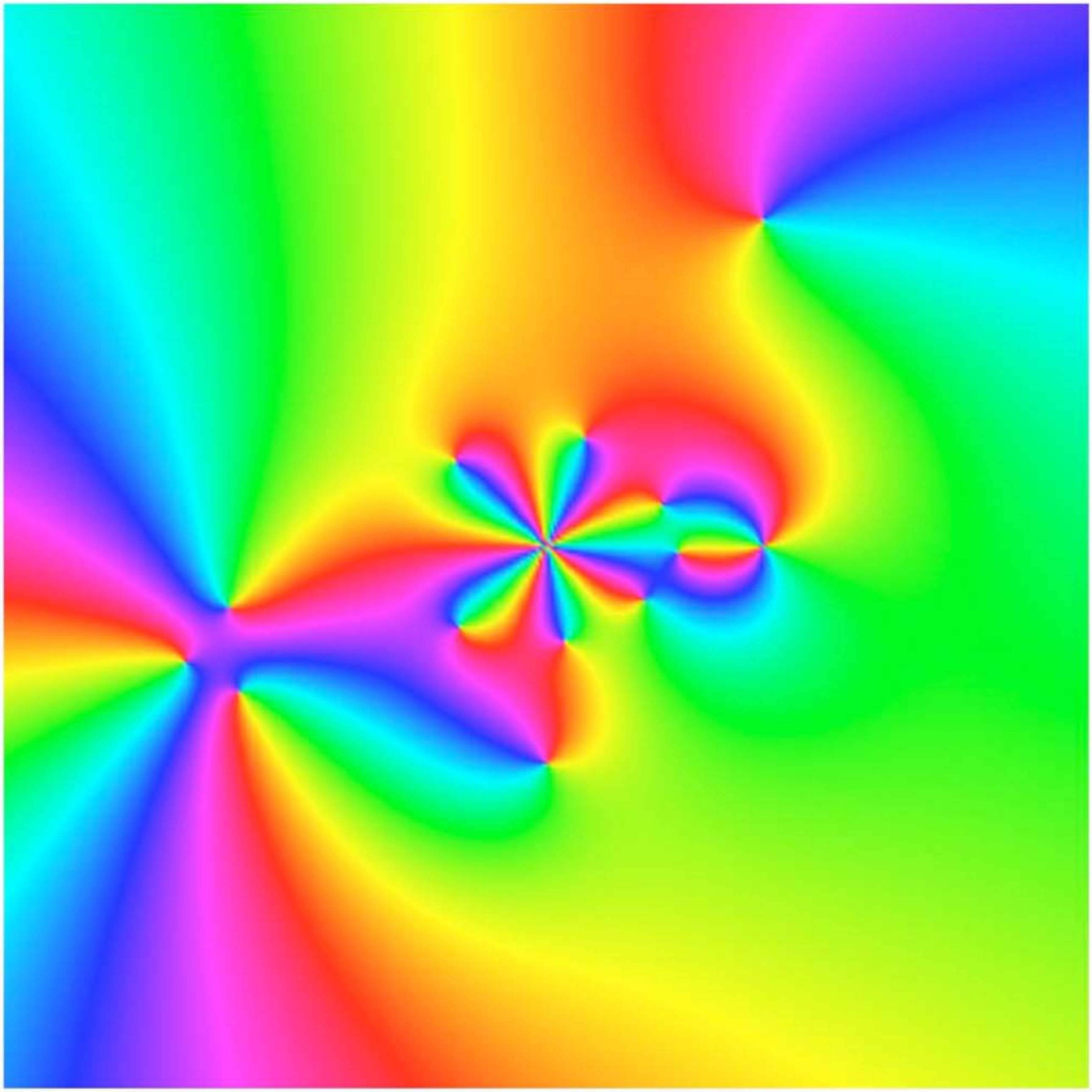
$$f(z) = \frac{(z-1)^2(z-(2+3i))(z+(3+i))^3}{(z-2)^2(z+2i)}$$



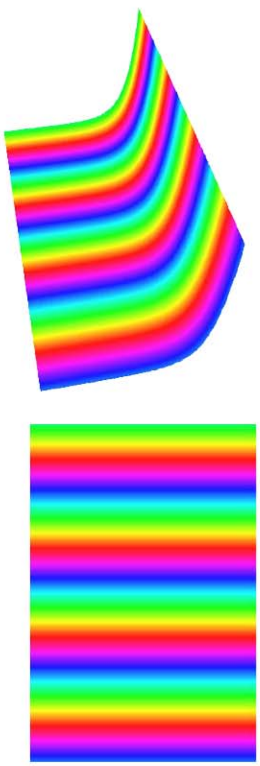
Vue de loin :



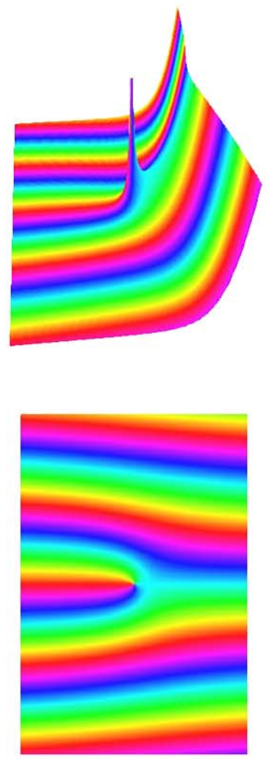
$$f(z) = \frac{(z-1)^2(z-(2+3i))(z+(3+i))^3}{(z-2)^2(z+2i)} + \frac{25}{z^5}$$



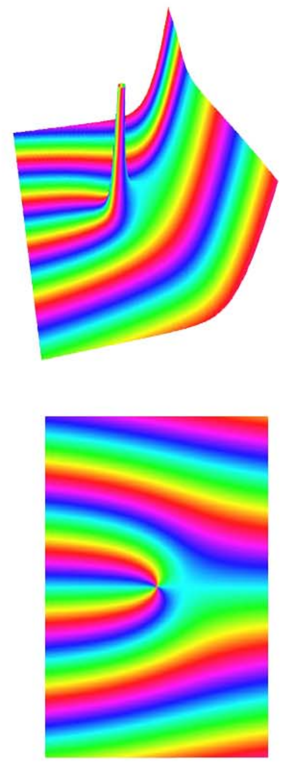
FONCTION EXPONENTIELLE



e^z



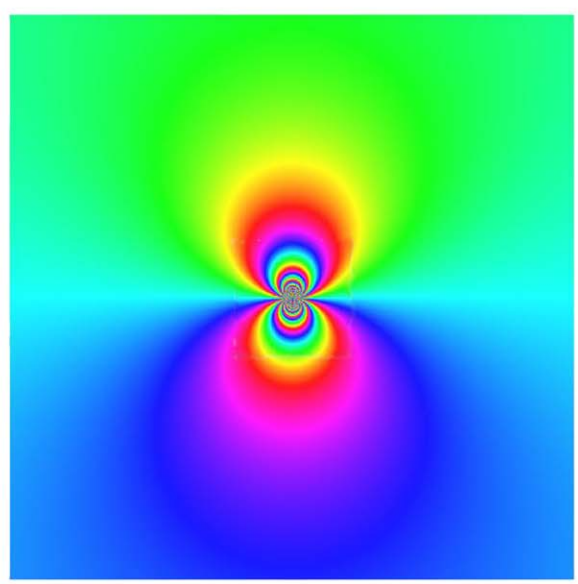
e^z/z



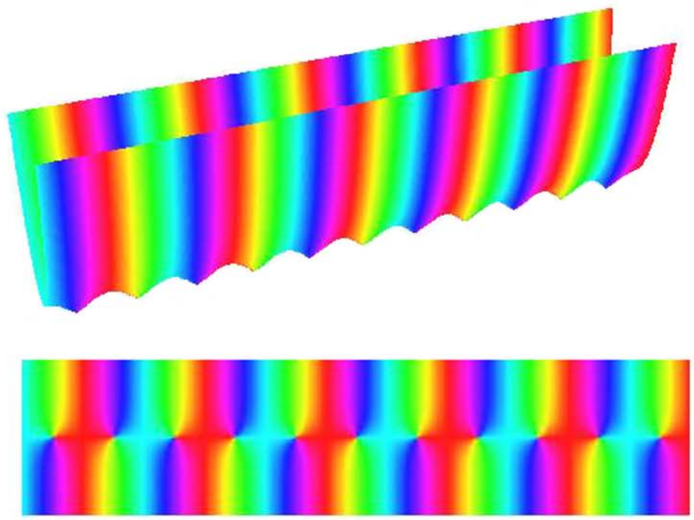
e^z/z^2

Singularité
essentielle
à l'origine :

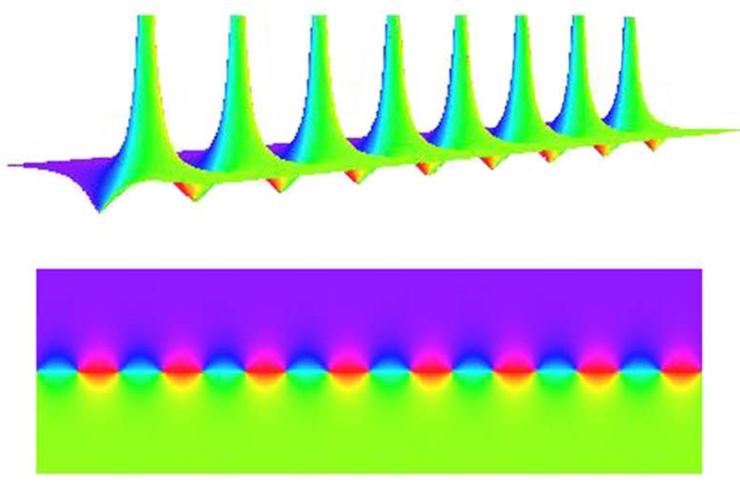
$$e^{1/z}$$



FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES



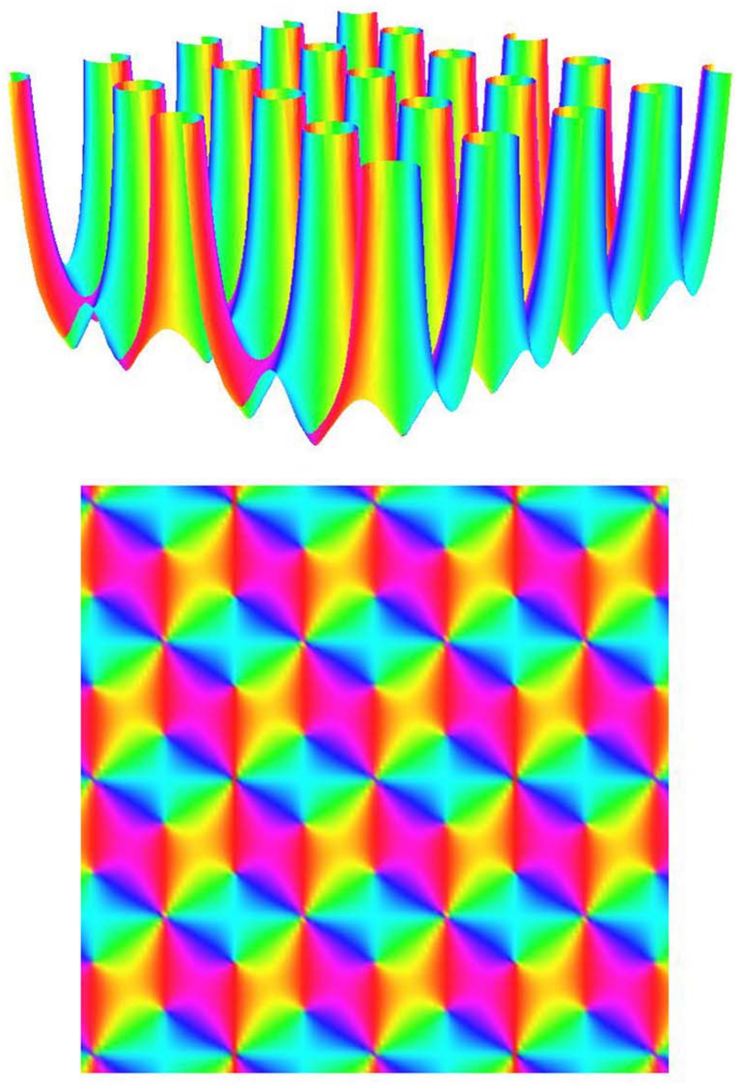
$\sin(z)$



$\tan(z)$

FONCTIONS ELLIPTIQUES

Par définition, une ***fonction elliptique*** est une fonction méromorphe doublement périodique.



Fonction elliptique $\mathcal{P}(z)$ de Weierstrass

FONCTION GAMMA D'EULER

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt \qquad \mathscr{R}z>0$$

$$\Gamma(z) = k^z\int_0^\infty t^{z-1}e^{-kt}\,dt \qquad \mathscr{R}z>0,\quad \mathscr{R}k>0$$

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^z}{z(z+1)\ldots(z+n)} \qquad (z\neq 0,-1,-2,\ldots)$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n}\right] \qquad (|z|<\infty)$$

$$\gamma = \lim_{m\to\infty}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{m}-\ln m\right] = .57721\ 56649\ldots$$

constante d'Euler

$$\Pi(z) = z! = \Gamma(z+1)$$

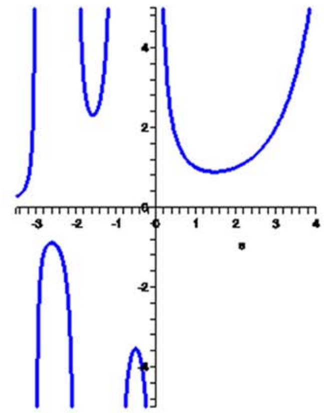
$$\Gamma(n+1) = 1\cdot2\cdot3\ldots(n-1)n = n!$$

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = 2\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \pi^{\frac{1}{2}} = 1.77245\ 38509\ldots = (-\tfrac{1}{2})!$$

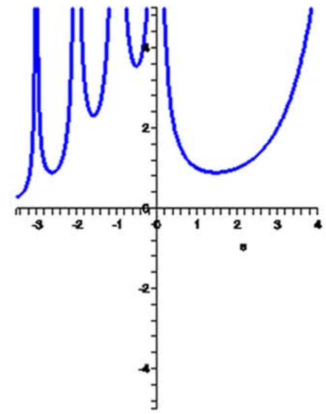
FONCTION GAMMA D'EULER

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt \quad \mathscr{R}z>0$$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

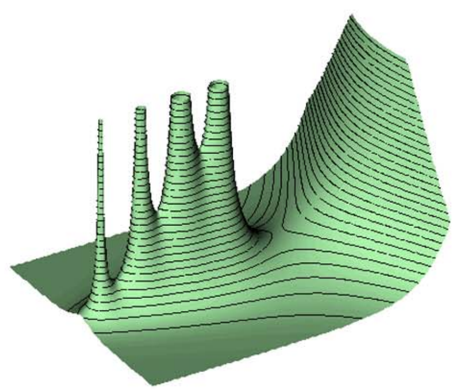


Graphe de $\Gamma(x)$

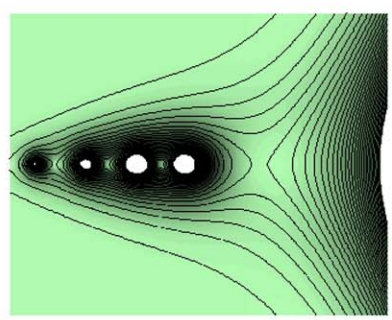


Graphe de $|\Gamma(x)|$

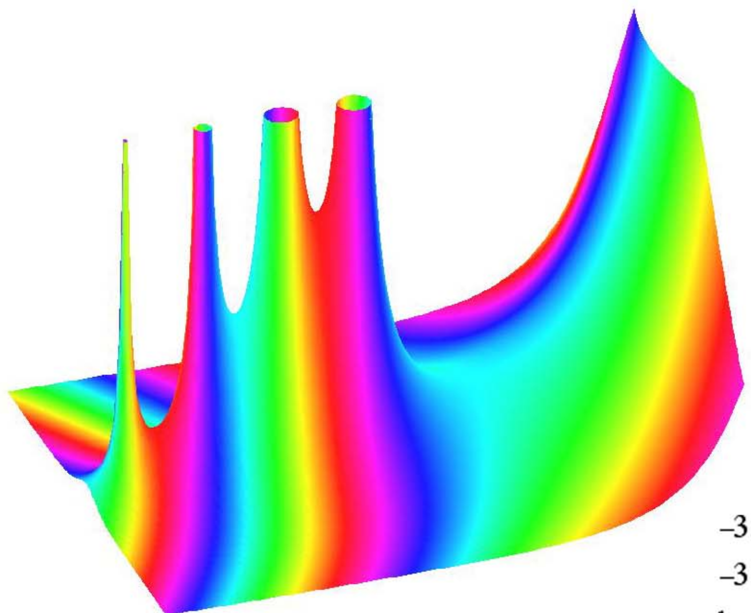
Graphe de $|\Gamma(z)|$



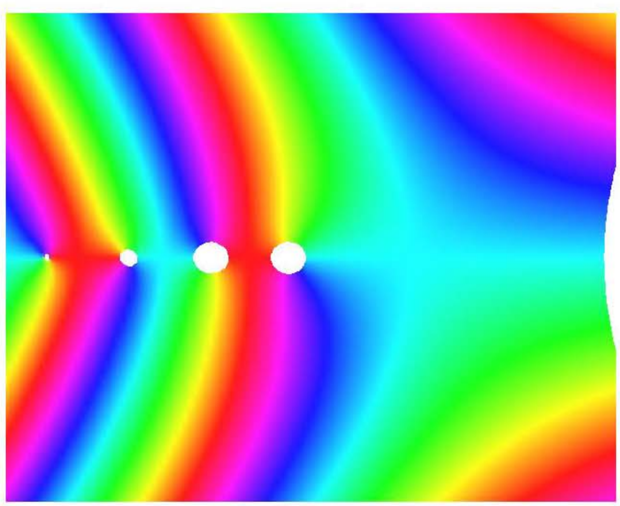
Courbes de niveau de $|\Gamma(z)|$



FONCTION GAMMA D'EULER
(en couleurs)



$-3.5 \leq x \leq 4$
$-3 \leq y \leq 3$
hauteur maximum $= 5$



FONCTION ZÊTA D'EULER

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p\,:\,\text{premier}} \frac{1}{\left(1-\frac{1}{p^s}\right)} \qquad \text{si } s>1$$

En effet, on a les séries géométriques

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^s}\right)} = 1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{2^{2s}}+\frac{1}{2^{3s}}+\cdots+\frac{1}{2^{k_2 s}}+\cdots$$

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3^s}\right)} = 1+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{3^{2s}}+\frac{1}{3^{3s}}+\cdots+\frac{1}{3^{k_3 s}}+\cdots$$

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{5^s}\right)} = 1+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{5^{2s}}+\frac{1}{5^{3s}}+\cdots+\frac{1}{5^{k_5 s}}+\cdots$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{p^s}\right)} = 1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\frac{1}{p^{3s}}+\cdots+\frac{1}{p^{k_p s}}+\cdots$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Le terme général du produit de ces séries est

$$\frac{1}{2^{k_2 s}}\cdot\frac{1}{3^{k_3 s}}\cdot\frac{1}{5^{k_5 s}}\cdots\cdot\frac{1}{p^{k_p s}}\cdots = \frac{1}{(2^{k_2}\cdot 3^{k_3}\cdot 5^{k_5}\cdots\cdot p^{k_p}\cdots)^s} = \frac{1}{n^s}$$

et il suffit, pour conclure, d'invoquer le

THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ARITHMÉTIQUE

qui dit que tout entier positif peut s'écrire de façon unique comme un produit de nombres premiers (à l'ordre des facteurs près).

FONCTION ZÊTA DE RIEMANN

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \qquad \mathscr{R}s > 1$$

$$\zeta(s) = \prod_{p\,:\,\text{premier}} (1-p^{-s})^{-1} \qquad \mathscr{R}s > 1$$

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x-1}\,dx \qquad \mathscr{R}s > 1$$

$$\zeta(s) = \frac{1}{(1-2^{1-s})\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x+1}\,dx \qquad \mathscr{R}s > 0$$

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{n} k^{-s} + (s-1)^{-1} n^{1-s} - s \int_n^\infty \frac{x-[x]}{x^{s+1}}\,dx$$

$$n = 1, 2, \ldots, \qquad \mathscr{R}s > 0$$

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{B_{2k}}{2k} \binom{s+2k-2}{2k-1} - \binom{s+2n}{2n+1} \int_1^\infty \frac{B_{2n+1}(x-[x])}{x^{s+2n+1}}\,dx$$

$$s \neq 1, \quad n = 1, 2, \ldots, \qquad \mathscr{R}s > -2n$$

FONCTION ZÊTA DE RIEMANN

suite

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \gamma_n (s-1)^n$$

où

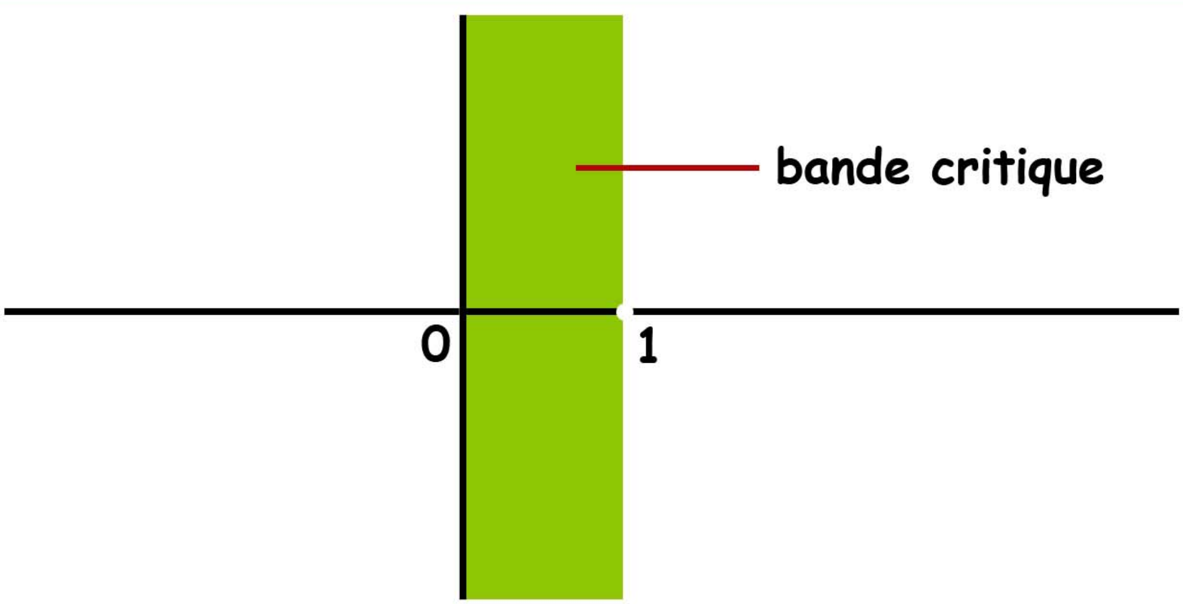
$$\gamma_n = \lim_{m \to \infty} \left\{ \sum_{k=1}^{m} \frac{(\ln k)^n}{k} - \frac{(\ln m)^{n+1}}{n+1} \right\}$$

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\tfrac{1}{2}\pi s\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s)$$

$$\zeta(s) = \frac{\exp\left(\ln 2\pi - 1 - \frac{1}{2}\gamma\right)s}{2(s-1)\Gamma\left(\frac{1}{2}s+1\right)} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{\frac{s}{\rho}}$$

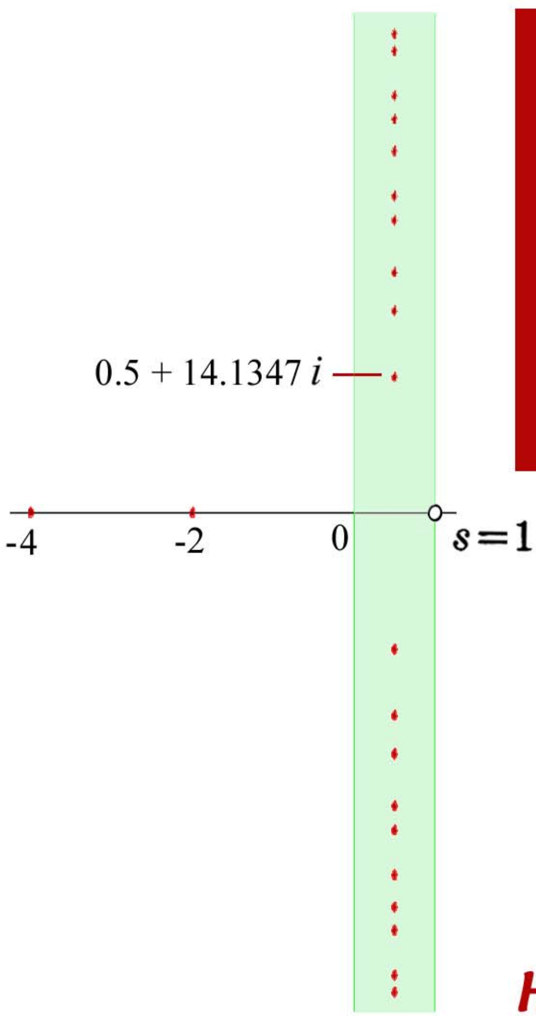
Le produit étant pris sur pris sur toutes les racines ρ de $\zeta(s)$ dans la bande critique

$$0 \leq \mathscr{R}s \leq 1 .$$



PROLONGEMENT ANALYTIQUE
DE LA FONCTION ZÊTA D'EULER

La fonction zêta d'Euler possède un prolongement analytique à tout le plan complexe, sauf au point $s=1$ *où elle devient infinie (comme* $\frac{1}{s-1}$ *, pôle simple). De plus, ce prolongement s'annule seulement aux entiers pairs strictement négatifs ainsi qu'en une infinité de points dans la bande verticale* $0 \leq \mathscr{R}s \leq 1$. *Riemann, 1859.*

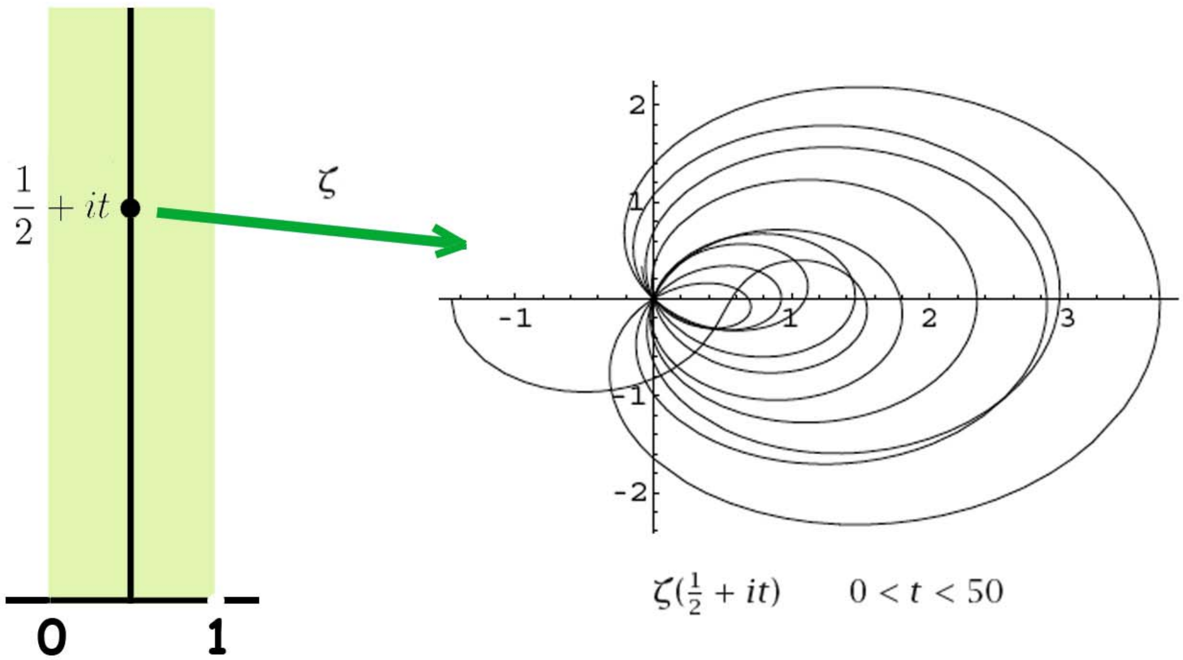


Il semble très probable que toutes les racines dans cette bande soient situées sur la droite verticale

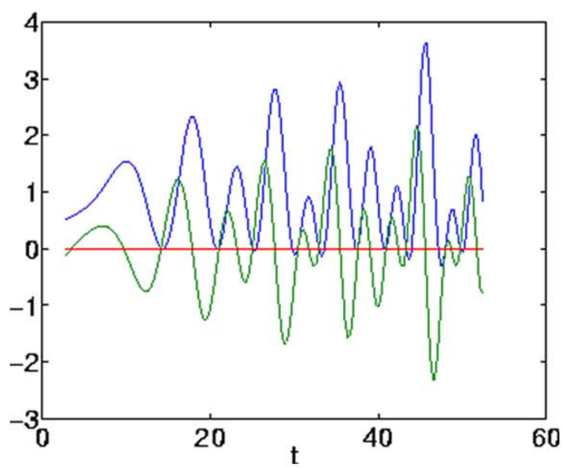
$$\mathscr{R}s = \frac{1}{2}.$$

HYPOTHÈSE DE RIEMANN, 1859

IMAGE DE LA DROITE CRITIQUE

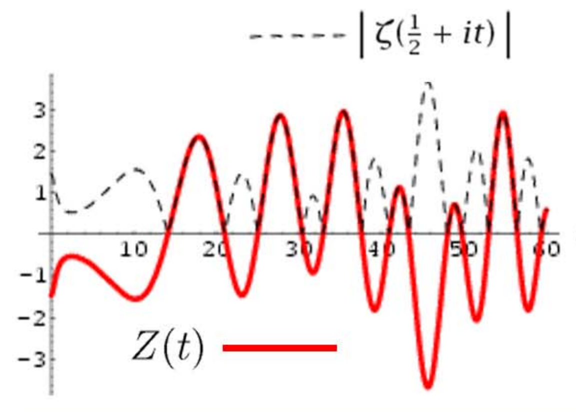


$\zeta(\frac{1}{2}+it) \qquad 0 < t < 50$



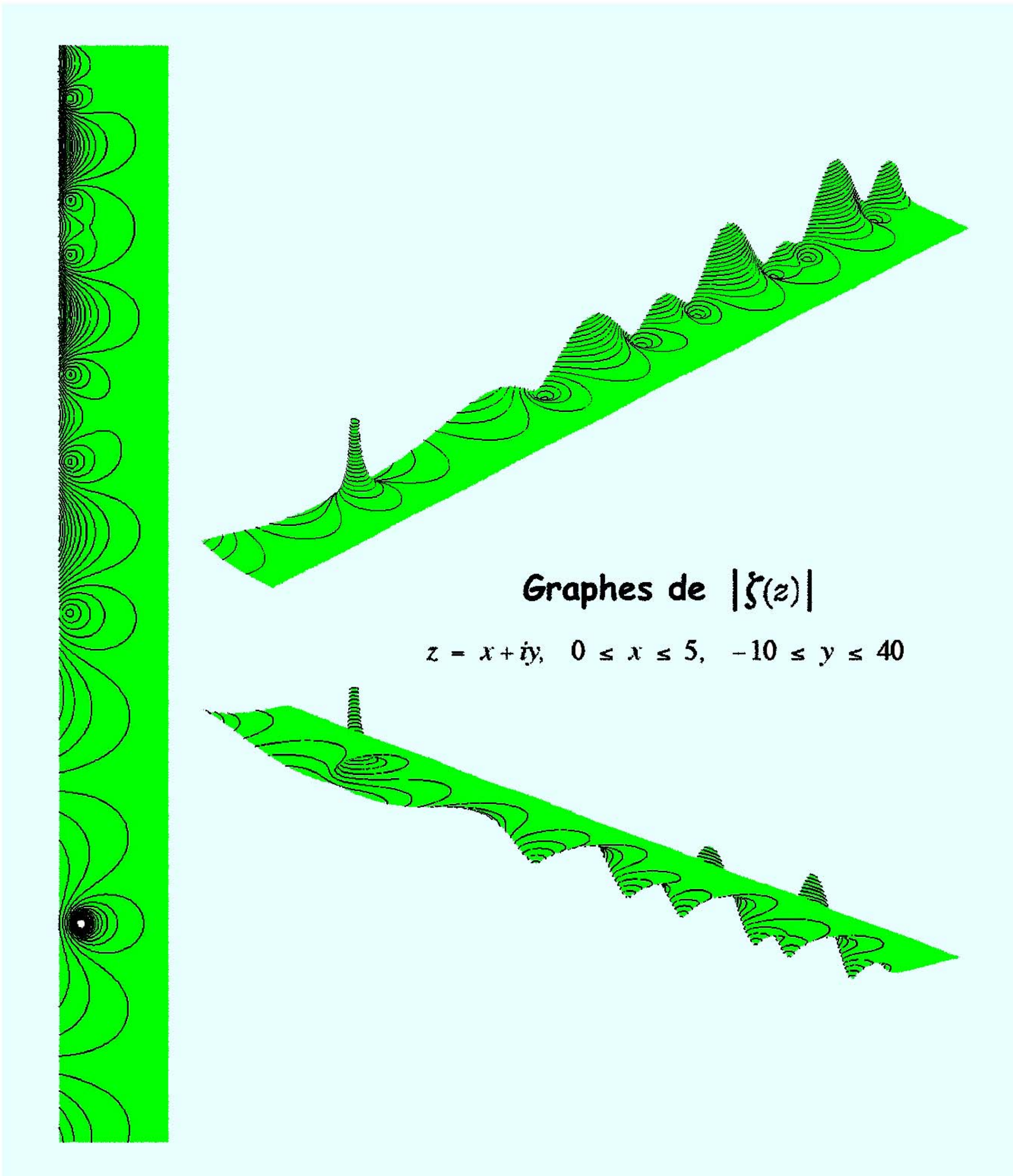
Bleu : partie réelle de $\zeta(\frac{1}{2}+it)$

Vert : partie imaginaire de $\zeta(\frac{1}{2}+it)$



$$\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right) = Z(t)\, e^{-i\vartheta(t)}$$

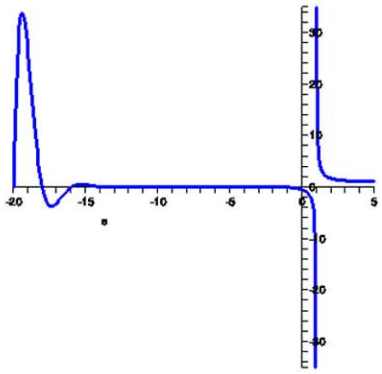
GRAPHES DE LA FONCTION ZÊTA



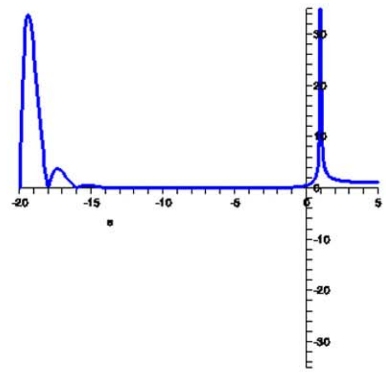
Graphes de $\left|\zeta(z)\right|$

$z = x + iy, \quad 0 \le x \le 5, \quad -10 \le y \le 40$

GRAPHES DE LA FONCTION ZÊTA



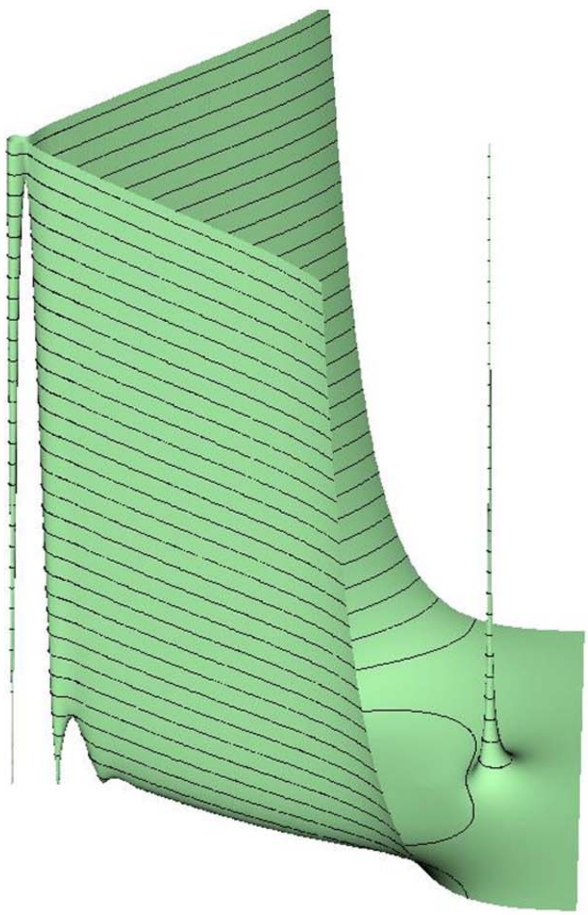
Graphe de $\zeta(x)$

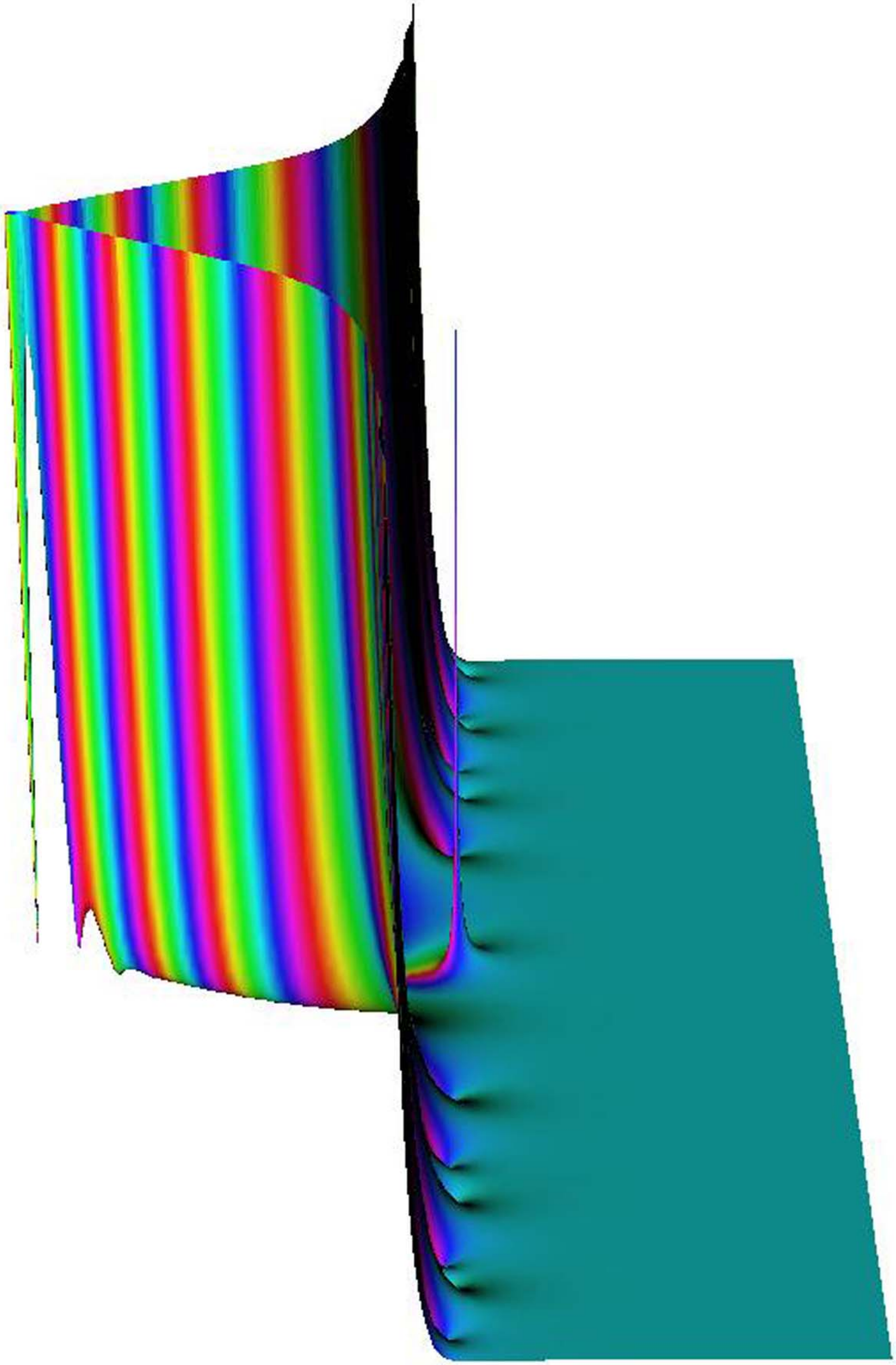


Graphe de $|\zeta(x)|$

Graphe de $|\zeta(z)|$

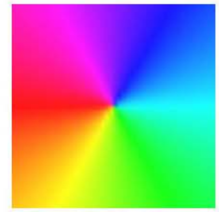
$$z = x + iy,$$
$$-20.5 \le x \le 5, \quad -10 \le y \le 10$$



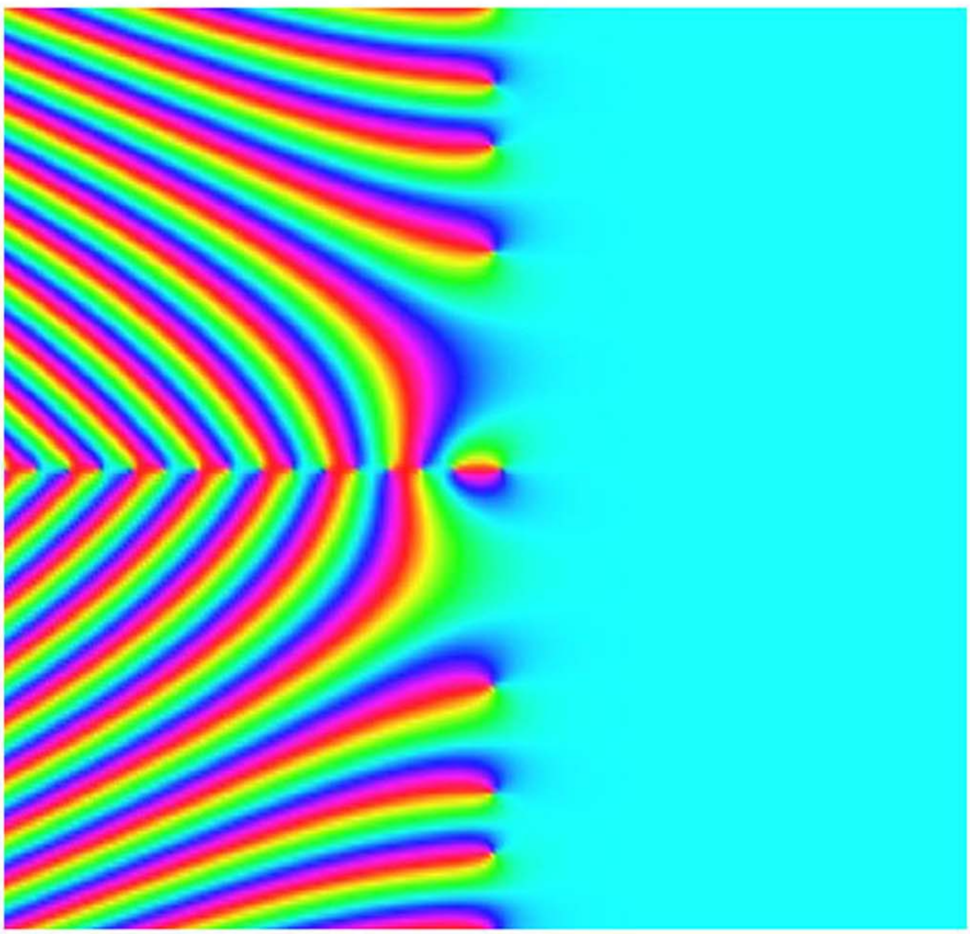


ARGUMENT COLORÉ DE ZÊTA

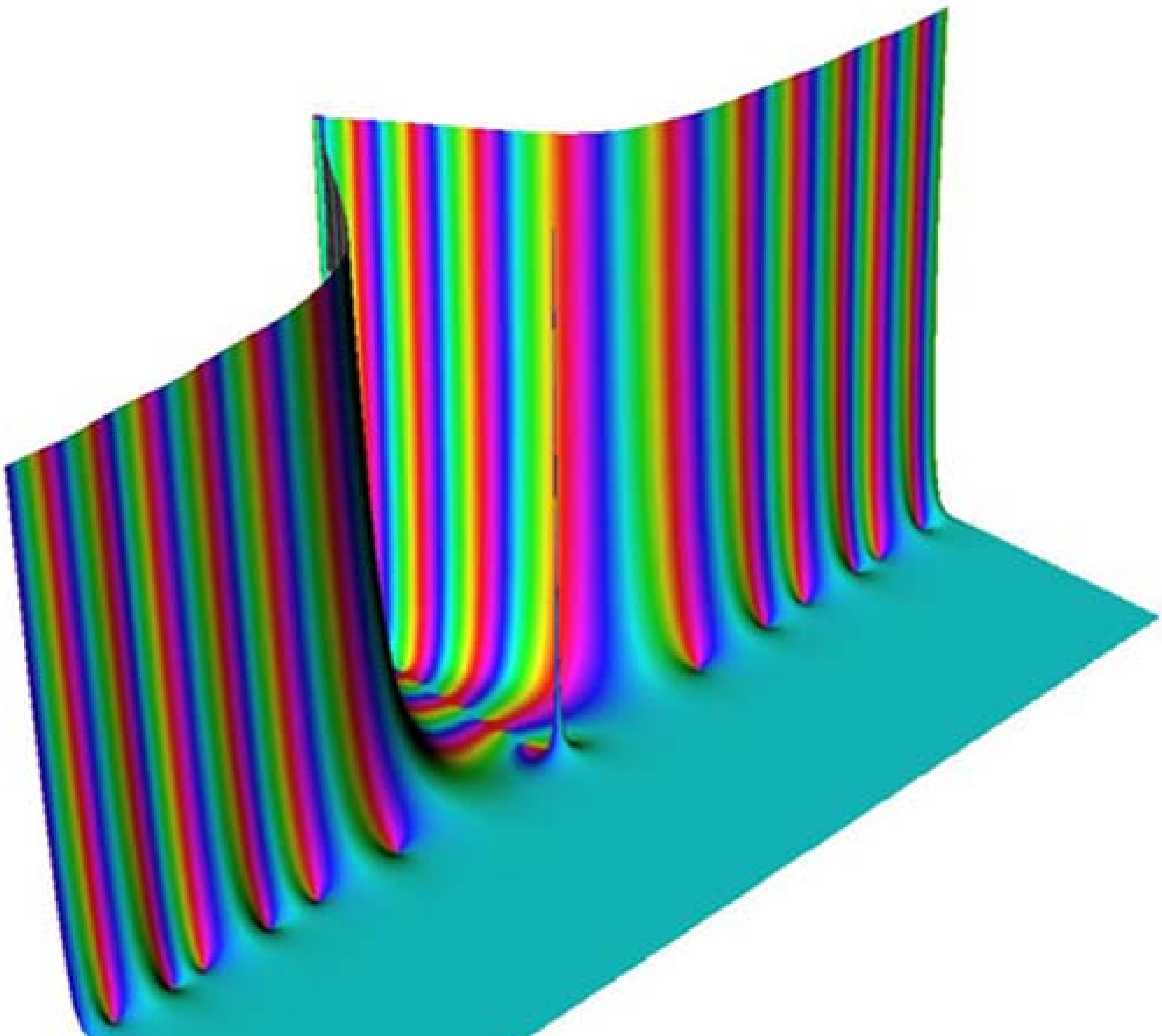
Pour chaque nombre complexe s**,**
la couleur du point s
est déterminée par l'argument de s **:**

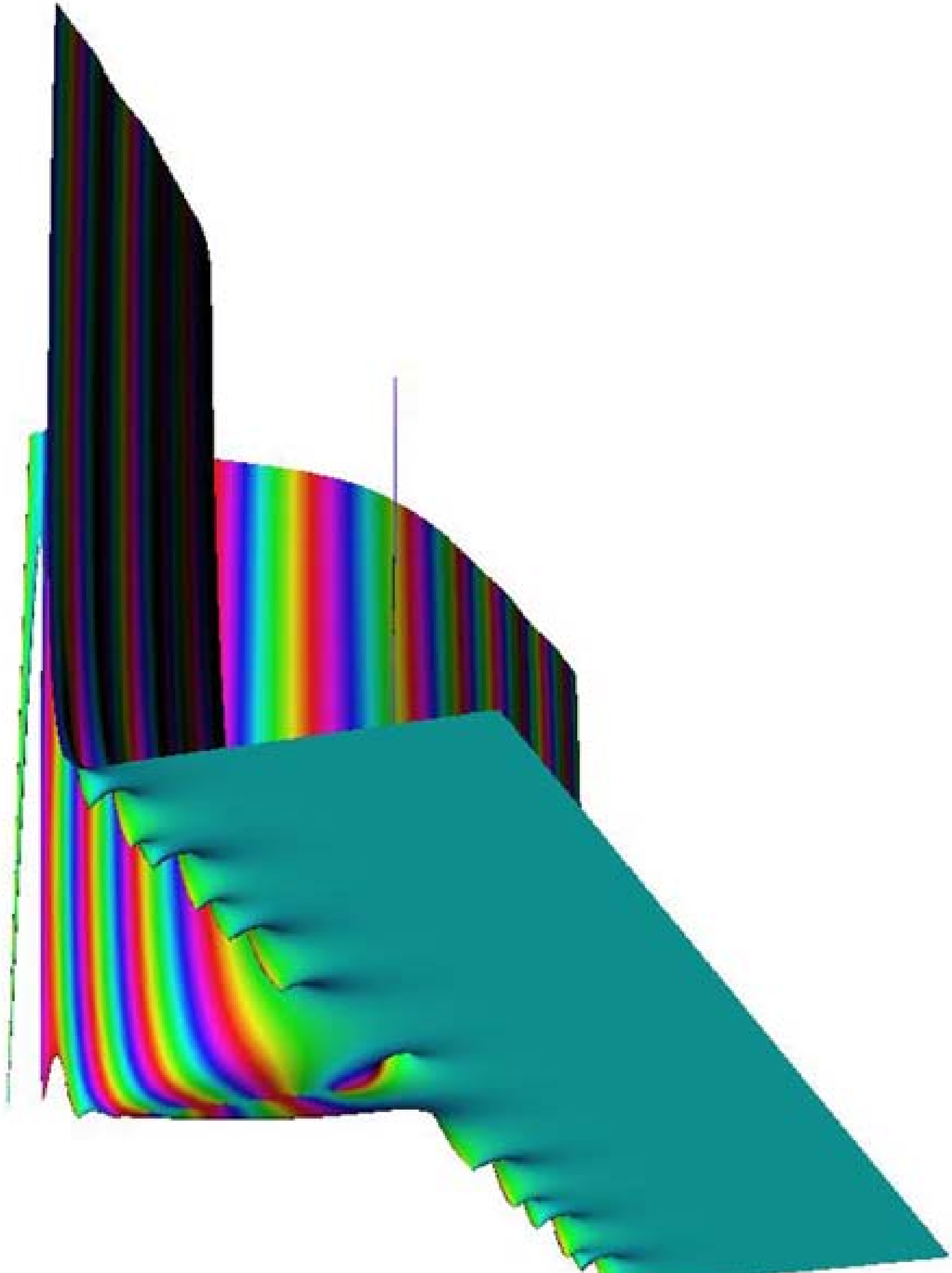


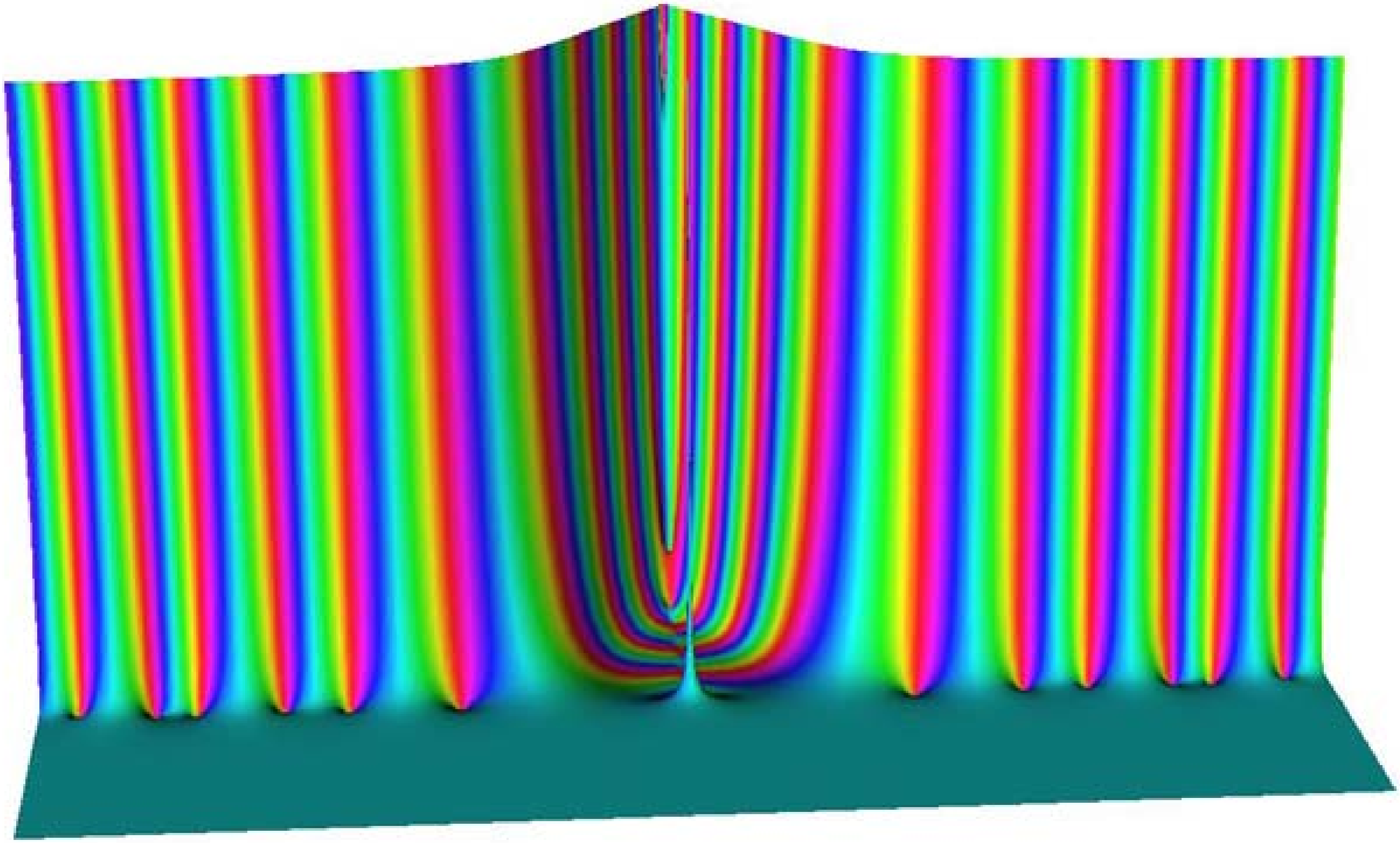
Pour chaque nombre complexe s**, la couleur du point** s
est déterminée par l'argument de $\zeta(s)$ **:**

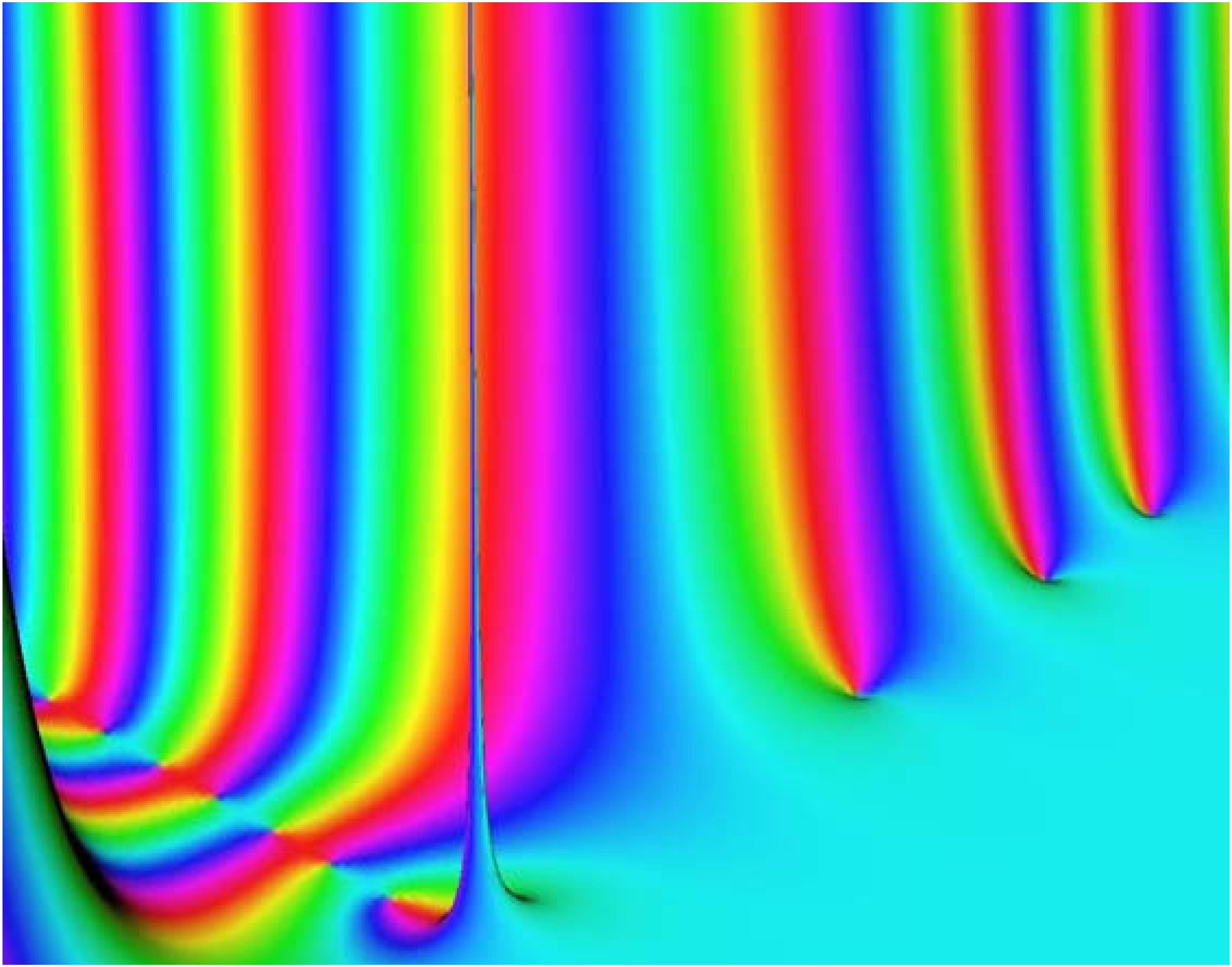


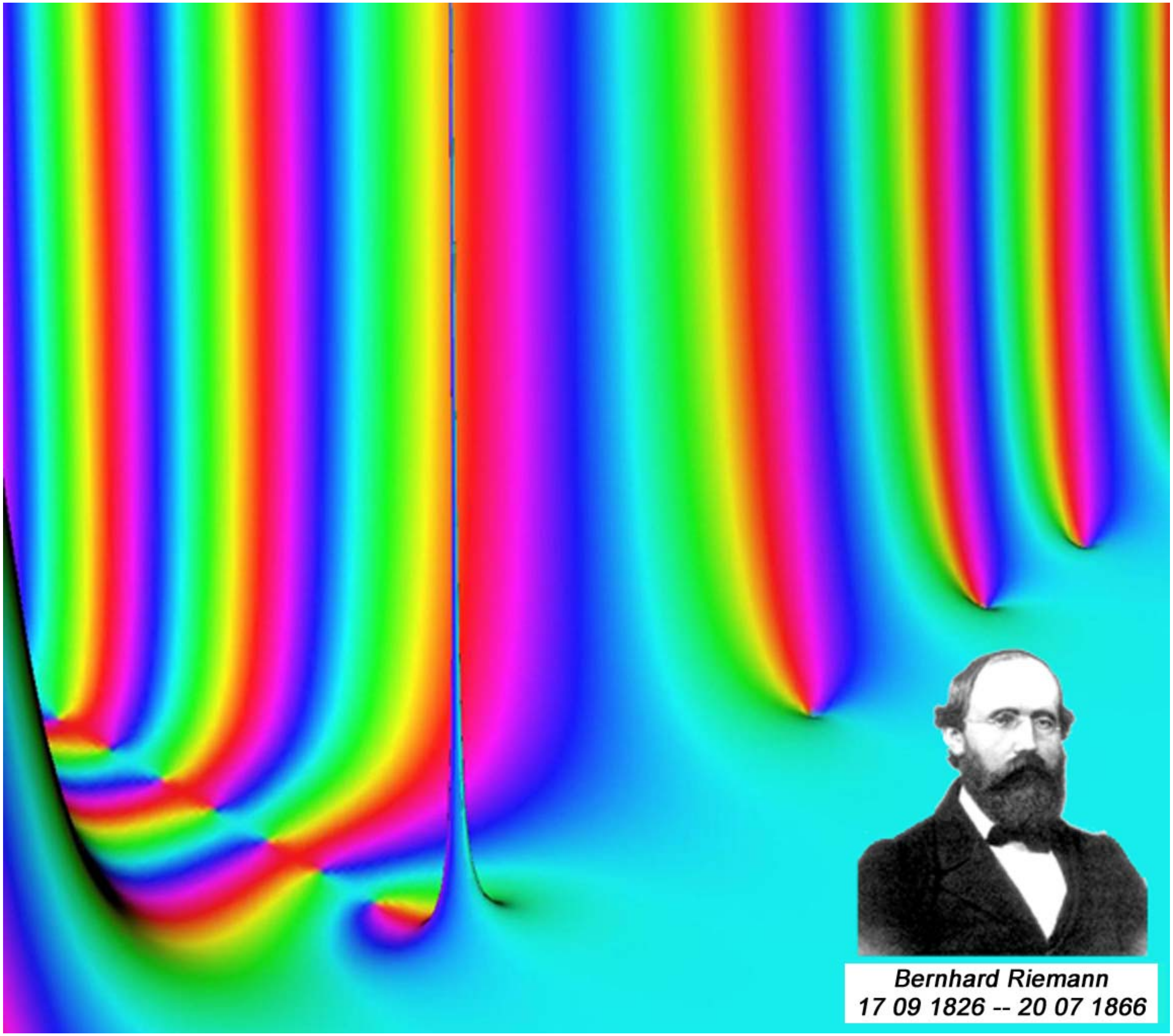
Les carrefours de couleurs correspondent aux racines de la fonction $\zeta(s)$ **ainsi qu'à son pôle au point 1.**










Bernhard Riemann
17 09 1826 -- 20 07 1866

PROGRAMMES MAPLE

```
f := z -> z^2:
dom := -1..1, -1..1:
hmax := 5:
gr := [200,200]:
g := (sigma,tau) -> abs(f(sigma+I*tau)):
```

REPRÉSENTATION 3d :

```
plot3d(g,
       dom,
       color=proc(x,y) argument(f(x+I*y)) end,
       grid=gr,
       scaling=constrained,
       style=patchnogrid,
       orientation=[-90,0],
       view=[dom, -0.5..hmax],
       projection=NORMAL
       ):
```

REPRÉSENTATION 2d :

```
plot3d(proc(x,y) 0 end,
       dom,
       color=proc(x,y) argument(f(x+I*y)) end,
       grid=gr,
       scaling=constrained,
       style=patchnogrid,
       orientation=[-90,0]
       ):
```

MERCI !!!