Devoir 1

À remettre le *17 octobre 2012* ; aucun retard ne sera toléré.

Exercice 1. Soit

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

a. Est-ce que X muni du produit matriciel forme un groupe ? Justifier.

b. Existe-il un groupe G et une représentation matricielle $\rho : G \to \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ tels que X est l'image de ρ ?

Exercice 2. *Cet exercice a pour but de répondre à la question : pourquoi exigeons-nous la commutativité de l'addition dans la définition d'un anneau ?*

Montrer que l'axiome de commutativité de l'addition dans la définition d'un anneau découle à partir des autres axiomes : dans la définition d'un anneau, remplacer l'axiome

≪ $(A, +)$ est un groupe abélien ≫

par ce qui suit :

≪ $(A, +)$ est un groupe ≫ (pas nécessairement abélien)

Montrer pour tous $a, b \in A$ on a que $a + b = b + a$.

Exercice 3. (Une représentation d'un groupe infini). Soit $\mathbb{R}^+$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs muni du produit usuel. Définir une fonction $\rho : \mathbb{R}^+ \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ par

$$\rho(r) = \begin{pmatrix} 1 & \log(r) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pour tout $r \in \mathbb{R}^+$.

a. Montrer que ρ est un représentation matricielle de $\mathbb{R}^+$.

b. Soit W le sous-espace de $\mathbb{C}^2$ défini comme $W = \{\left(\begin{smallmatrix} c \\ 0 \end{smallmatrix}\right) : c \in \mathbb{C}\}$. Montrer que W est stable relativement à la représentation ρ ; c'est-à-dire, montrer que $\rho(r)w \in W$ pour tout $r \in \mathbb{R}^+$ et tout $w \in W$.

c. Montrer qu'il n'existe pas de sous-espace $U \subset \mathbb{C}^2$ stable relativement à l'action de ρ tel que $\mathbb{C}^2 \cong W \oplus U$. (Suggestion : exprimer $\rho(r)$ dans une base différente.)