Devoir 2

À remettre le *31 octobre 2012* ; aucun retard ne sera toléré.

Soit G un groupe fini.

Exercice 1. Montrer que $\rho(g) = 1_V$ pour toute représentation complexe irréductible $\rho : G \to GL(V)$ ssi $g = 1_G$. Autrement dit,

$$\bigcap_{\substack{\rho:G\to GL(V)\\ \rho \text{ irréductible}}} \ker(\rho) = \{1_G\}.$$

(Indication : appliquer le Théorème de Maschke à la représentation régulière.)

Exercice 2. Montrer que toute représentation complexe irréductible d'un groupe abélien est de dimension 1. *(Indication : appliquer le Lemme de Schur à l'application $v \mapsto g \cdot v$.)*

Exercice 3. Soient $G' = [G, G]$ le sous-groupe dérivé de G et $Ab(G) = G/G'$ son abéliansé (voir les feuilles d'exercices pour la définition de G'). Montrer :

a. Si $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ est une représentation complexe de G de dimension 1, alors l'application $\bar{\rho}$ défini par $\bar{\rho}(gG') = \rho(g)$ est une représentation irréductible de $Ab(G)$.

b. Si $\varphi : Ab(G) \to \mathrm{GL}(V)$ est une représentation complexe irréductible de $Ab(G)$, alors l'application $\tilde{\varphi}(g) = \varphi(gG')$ est une représentation complexe de G de dimension 1.

c. En déduire qu'il y a une bijection entre les représentations complexes de dimension 1 de G est les représentations complexes irréductibles de $Ab(G)$.

d. Sachant que le sous-groupe dérivé de S_n est le group alterné A_n, en déduire qu'il y a exactement deux représentation de dimension 1 de S_n si $n \geq 2$.

Exercice 4. Montrer que $\rho(g) = 1_V$ pour toute représentation complexe $\rho : G \to GL(V)$ de dimension 1 ssi $g \in G'$. Autrement dit,

$$G' = \bigcap_{\substack{\rho:G\to \mathrm{GL}(V)\\ \dim(V)=1}} \ker(\rho).$$