Devoir 3

À remettre le *5 décembre 2012* ; aucun retard ne sera toléré.

Exercice 1. Soient G un groupe fini et $X : G \to \mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$ une représentation matricielle de G. Soit P la matrice

$$P = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} X(h).$$

a. Montrer que $X(g)P = PX(g) = P$ pour tout $g \in G$.

b. Montrer que l'application $v \mapsto Pv$ est une projection de $\mathbb{C}^d$ sur le sous-espace

$$\{v \in \mathbb{C}^d : X(g)v = v \text{ pour tout } g \in G\}.$$

c. Soit X une représentation irréductible. Montrer que si X n'est pas isomorphe à la représentation triviale, alors P est la matrice nulle.

Exercice 2. Soient G un groupe fini et V un G-module sur $\mathbb{C}$. Soit P l'application de V vers V definie par

$$P(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} h \cdot v.$$

a. Montrer que $P(g \cdot v) = g \cdot P(v) = P(v)$ pour tout $g \in G$ et tout $v \in V$.

b. En déduire que P est une projection de G-modules de V sur le sous-module

$$V^G = \{v \in V : g \cdot v = v \text{ pour tout } g \in G\}.$$

c. Soit V un G-module simple. Montrer que si V n'est pas isomorphe au G-module trivial, alors P est l'application nulle.

Exercice 3. Voici quelques entrées de la table de caractères d'un certain groupe fini G :

g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
6	2	0	0	-1	-1
7	-1	-1	1	0	0
?	?	?	-1	?	?
3	-1	1	0	α	$\overline{\alpha}$

où $\alpha = \frac{i\sqrt{7}-1}{2}$ et g_1, g_2, …, g_6 sont des représentants des classes de conjugaison de G.

a. Compléter la table de caractères de G.

b. Calculer le degré de chaque représentation irréductible de G.

c. Calculer la cardinalité de G.

d. Calculer la cardinalité de chaque classe de conjugaison de G.

e. Calculer le centre de G.

f. Calculer le sous-groupe dérivé de G.

g. Calculer les sous-groupes normaux de G.

h. Déterminer si G est commutatif.

i. Déterminer si G est un groupe résoluble.

j. Déterminer si G est simple.