Feuille d'exercices : Groupes et Représentations

Exercice 1. Soit D_4 le groupe des isométries du carré à sommets $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$ et $(1,-1)$ dans $\mathbb{R}^2$. Choisir une base de $\mathbb{R}^2$ et exprimer les isométries dans cette base.

Exercice 2. Soit G le groupe avec présentation

$$G = \left\langle a, b \mid a^4 = b^2 = 1,\ b^{-1}ab = a^{-1} \right\rangle .$$

Montrer que

$$\rho(a) = \begin{pmatrix} -7 & 10 \\ -5 & 7 \end{pmatrix} \qquad \rho(b) = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

se prolonge en une représentation de G.

Exercice 3. Soit $\rho : G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ une représentation matricielle de G de degré n. Montrer que l'application $g \mapsto \det(\rho(g))$ est une représentation de G de degré 1.

Exercice 4. Soit $\rho : G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ une représentation matricielle d'un groupe fini G. On définit l'application $\rho^* : G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ par $\rho^*(g) = \rho(g^{-1})^\top$, où $M^\top$ désigne la transposée d'une matrice M. Montrer que ρ^* est une représentation matricielle de G de dimension n.

Exercice 5. Soit G un groupe. Le *commutateur* de deux éléments $g, h \in G$, noté $[g,h]$, est

$$[g,h] = ghg^{-1}h^{-1}.$$

Le *sous-groupe dérivé* de G, noté $[G,G]$ ou G', est le sous-groupe engendré par les commutateurs :

$$[G,G] = \langle [g,h] : g, h \in G \rangle$$

a. Montrer que G est abélien ssi son sous-groupe dérivé $[G,G]$ est trivial.

b. Montrer que le sous-groupe dérivé $[G,G]$ de G est un sous-groupe normal de G.

c. Montrer que le quotient $Ab(G) = G/[G,G]$, appelé l'*abéliansé* de G, est abélien.

d. Sachant que le groupe alterné A_n (le sous-groupe du groupe symétrique S_n des permutations paires) est engendré par les cycles d'ordre 3, montrer que $[S_n, S_n] = A_n$.