Feuille d'exercices : Irréductibilité

Exercice 1. Soit D_4 le groupe des isométries du carré à sommets $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$ et $(1,-1)$ dans $\mathbb{R}^2$. Est-ce que cette représentation est irréductible ?

Exercice 2. Soit $\rho : G \to \mathrm{GL}_2(V)$ une représentation complexe du groupe fini G. Montrer que s'il existe $g, h \in G$ tels que $\rho(g)\rho(h) \neq \rho(h)\rho(g)$, alors V est simple.

Exercice 3. Soient G un groupe fini et V un G-module sur $\mathbb{C}$ de dimension 3. Montrer que V est simple ssi il n'existe pas un vecteur $v \in V$ tel que $gv \in \mathbb{C}v$ pour tout $g \in G$.

Exercice 4. Le groupe symétrique S_4 est engendré par les permutations $\sigma = 2134$ et $\tau = 2341$. Soit ρ la représentation matricielle de S_4 définie par les matrices

$$\rho(\sigma) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \rho(\tau) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Montrer que ρ est une représentation irréductible. (Il n'est pas nécessaire de vérifier que ρ est une représentation.)

Exercice 5. Montrer que la restriction de la représentation standard de S_3 au sous-groupe engendré par le cycle $(1,2,3)$ n'est pas irréductible.

Exercice 6. Soient $\varphi : G \to H$ un morphisme surjectif de groupes et $\rho : H \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation irréductible de H. Montrer que $\rho \circ \varphi$ est une représentation irréductible de G.

Exercice 7. Soit $\varphi : G/N \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation du groupe quotient G/N, où N est un sous-groupe normal d'un groupe G.

a. Montrer que $\tilde{\varphi} : G \to \mathrm{GL}(V)$ défini par $\tilde{\varphi}(g) = \varphi(gN)$ est une représentation de G.

b. Montrer que φ est irréductible ssi $\tilde{\varphi}$ est irréductible.

Exercice 8.[Nouvel exercice] Montrer qu'un G-module V est simple ssi pour tout $v \in V$ non nul, on a que V est engendré (comme espace vectorial) par les éléments $\{gv : g \in G\}$.