Feuille d'exercices : Morphismes de modules

Exercice 1. Soient $\varphi : V \to W$ un morphisme de G-modules et $\mathcal{B}$ une base de V. Montrer que si $\varphi(gb) = g\varphi(b)$ pour tout $b \in \mathcal{B}$, alors φ est un morphisme de G-modules.

Exercice 2. Soient V et V' deux G-modules, $f : V \to V'$ un morphisme de G-modules et

$$\ker(f) = \{v \in V : f(v) = 0\}, \quad f(U) = \{f(u) \mid u \in U\}, \quad f^{-1}(U') = \{v \in V \mid f(v) \in U'\}.$$

a. Montrer que $\ker(f)$ est un sous-module de V.

b. Montrer que $f(U)$ pour tout sous-module U de V est un sous-module de V'.

c. Montrer que $f^{-1}(U')$ pour tout sous-module U' de V' est un sous-module de V.

Exercice 3. Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une application linéaire $\pi : V \to V$ est dit *projection* si $\pi \circ \pi = \pi$.

a. Soient V un G-module et $\pi : V \to V$ une projection. Montrer que π est un moprhisme de G-modules.

b. En déduire que $V \cong \ker(\pi) \oplus \mathrm{im}(\pi)$ en tant que G-modules.

Exercice 4. Soient V un G-module sur $\mathbb{C}$ et U un sous-module de V. Montrer qu'il existe un G-morphisme surjectif $\psi : V \to U$.

Exercice 5. Soient V et W deux G-modules sur un corps $\mathbb{K}$. Soit $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ l'ensemble des applications $\mathbb{K}$-linéaires de V vers W.

a. Montrer que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ muni des opérations suivantes est un G-module :

- $(\varphi + \psi)(v) = \varphi(v) + \psi(v)$ pour $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ et $v \in V$.
- $(k\varphi)(v) = k\,\varphi(v)$ pour $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$, $v \in V$ et $k \in \mathbb{K}$.
- $(g \cdot \varphi)(v) = g(\varphi(g^{-1}v))$ pour $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ et $g \in G$.

b. Montrer que l'ensemble de G-invariants de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ est égal à l'ensemble de G-morphismes de V vers W :

$$(\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W))^G = \mathrm{Hom}_G(V, W).$$