# Feuille d'exercices : Caractères

**Exercice 1.** Soit $\mathbb{K}$ un corps et $A, B$ deux matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$. Montrer que

*a.* $\operatorname{trace}(A+B) = \operatorname{trace}(A) + \operatorname{trace}(B)$.

*b.* $\operatorname{trace}(\lambda A) = \lambda \operatorname{trace}(A)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

*c.* $\operatorname{trace}(AB) = \operatorname{trace}(BA)$.

*d.* $\operatorname{trace}(A) = \operatorname{trace}(PAP^{-1})$ pour tous $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

**Exercice 2.** Soit $S_n$ le groupe symétrique sur $n$ éléments.

*a.* Si $\sigma \in S_n$ est écrit comme produit de cycles $\sigma = \big(a, b, c, \dots\big)\big(i, j, k, \dots\big) \cdots \big(u, v, w, \dots\big)$, montrer que pour $\alpha \in S_n$ on a

$$\alpha\sigma\alpha^{-1} = \Big(\alpha(a), \alpha(b), \alpha(c), \dots\Big)\Big(\alpha(i), \alpha(j), \alpha(k), \dots\Big) \dots \Big(\alpha(u), \alpha(v), \alpha(w), \dots\Big).$$

*b.* Montrer que deux permutations dans $S_n$ sont conjuguées ssi elles ont même type cyclique (c'est-à-dire, même nombre de cycles de chaque longueur).

*c.* En déduire que le nombre de représentations irréductibles de $S_n$ est égal au nombre de partages de $n$. (Rappel : une *partage* d'un entier $n$ est une suite finie $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ d'entiers strictement positifs telle que $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = n$.)

**Exercice 3.** Pour deux fonctions $\chi$ et $\psi$ quelconques de $G$ vers $\mathbb{C}$, on définit

$$\langle \chi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g)\overline{\psi(g)}.$$

Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire complexe sur l'espace des fonctions de $G$ vers $\mathbb{C}$.

**Exercice 4.** Soit $D_4$ le groupe des isométries du carré à sommets $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$ et $(1,-1)$ dans le plan. En fixant une base du plan, on obtient une représentation matricielle de $D_4$.

*a.* Choisir une base du plan et exprimer les isométries dans la base.

*b.* Montrer que la représentation est irréductible par calcul des vecteurs propres.

*c.* Calculer le caractère de la représentation.

*d.* Montrer que la représentation est irréductible par calcul des produits scalaires de caractères.

*e.* En déduire qu'il y a exactement 5 représentations irréductibles de $D_4$ : une de dimension 2 et quatre de dimension 1.

*f.* Calculer la table de caractères de $D_4$. *(Indication : voir Devoir 2.)*

*g.* À l'aide des relations d'orthogonalité, déterminer le caractère de la représentation de dimension 2 en utilisant uniquement les caractères linéaires de $D_4$.