Feuille d'exercices : Produits tensoriels

Exercice 1. Soient V, W deux espace vectoriel tel que $\dim(W) = 1$. Montrer que $V \otimes W \cong V$.

Exercice 2. Soient U, V, W trois espaces vectoriels. Montrer que

$$(U \oplus V) \otimes W \cong (U \otimes W) \oplus (V \otimes W).$$

Exercice 3. Soient G un groupe fini, V un $\mathbb{C}G$-module, et W un $\mathbb{C}G$-module tel que $\dim(W) = 1$. Montrer que $V \otimes W$ est simple ssi V est simple.

Exercice 4. Soient V_{triv}, V_{signe} et V_{std} les S_4-modules trivial, signe et standard, resp.

a. Calculer les caractères et les dimensions des modules suivants :
- $S(V_{\text{triv}} \otimes V_{\text{triv}})$
- $A(V_{\text{signe}} \otimes V_{\text{signe}})$
- $A(V_{\text{std}} \otimes V_{\text{std}})$
- $S((V_{\text{triv}} \oplus V_{\text{signe}}) \otimes (V_{\text{triv}} \oplus V_{\text{signe}}))$

b. Déterminer si les modules ci-dessus sont simples.

Exercice 5. Soient V et W deux G-modules sur un corps $\mathbb{K}$ et soit $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ l'ensemble des applications $\mathbb{K}$-linéaires de V vers W. Rappeler [1] que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ est un G-module, où

$$(g \cdot \varphi)(v) = g(\varphi(g^{-1}v)) \text{ pour } \varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \text{ et } g \in G.$$

a. Calculer le caractère du G-module $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$.

b. Calculer le caractère du G-module $W \otimes V^*$, où $V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$ et $\mathbb{K}$ est considéré comme un G-module avec la structure de G-module trivial : $g \cdot k = k$ pour tout $k \in \mathbb{K}$.

c. En déduire que $W \otimes V^* \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$.

1. Exercice 5 de la feuille d'exercices sur les morphismes de modules