Feuille d'exercices : Modules

Exercice 1. Soient K un anneau associatif et unitaire et M un K–module à droite. Montrer que M est simple ssi pour tout $m \in M$ non-nul, on a que $M = \{m \cdot a : a \in K\}$.

Exercice 2. Soient K un anneau associatif et unitaire et $f : M \to M'$ un morphisme de K–modules à gauche.

a. Montrer que $\ker(f) = \{m \in M : f(m) = 0\}$ est un sous-module de M.

b. Montrer que $\mathrm{im}(f) = \{f(m) \mid m \in M\}$ est un sous-module de M'.

c. Soit U' un sous-module de M'. Montrer que $f^{-1}(U')$ est un sous-module de M.

Exercice 3. Soient K un anneau associatif et unitaire et M un K–module à gauche.

a. Montrer que $0 \cdot m = 0$ pour tout $m \in M$.

b. Montrer que $(-1_K) \cdot m = -m$ pour tout $m \in M$.

Exercice 4. Soient K un anneau associatif et unitaire et M un K–module à droite. Soient $a \in K$ et $m \in M$ non-nul tels que $m \cdot a = 0$. Montrer que b ne possède pas un inverse à droite (c'est-à dire, il n'existe pas de $b \in K$ tel que $ab = 1_K$).

Exercice 5. Soient M un K–module à droite et $X \subseteq M$ un sous-ensemble quelconque. On définit l'*annulateur* $\mathrm{Ann}_K(X)$ de X dans K comme étant l'ensemble

$$\mathrm{Ann}_K(X) = \{a \in K : x \cdot a = 0 \text{ pour tout } x \in X\}.$$

a. Montrer que $\mathrm{Ann}_K(X)$ est un idéal à droite de K.

b. Montrer que si X est un sous-module de M alors $\mathrm{Ann}_K(X)$ est un idéal bilatère de K.

c. Montrer que M admet une structure naturelle de $K/\mathrm{Ann}_K(M)$–module (à droite).

d. Un module M est dit *fidèle* si $\mathrm{Ann}_K(M) = 0$. Montrer que tout K–module M est fidèle en tant qu'un $K/\mathrm{Ann}_K(M)$–module.

Exercice 6. Soit $f : M \to N$ un morphisme de K–modules. Dans cet exercice, vous allez montrer que le noyau L de f est uniquement déterminé par la propriété suivante :

(i) il existe un morphisme de K–modules $\ell : L \to M$ tel que $f \circ \ell = 0$; et

(ii) si $\ell' : L' \to M$ est un morphisme de K–modules tel que $f \circ \ell' = 0$, alors il existe un morphisme de K–modules $u : L' \to L$ tel que $\ell' = \ell \circ u$.

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "\ell"] & M \arrow[r, "f"] & N \\
L' \arrow[u, dashed, "u"] \arrow[ur, "\ell'"'] & &
\end{tikzcd}$$

a. Montrer que le noyau de f vérifie les conditions (i) et (ii).

b. Montrer que si L est un K–module qui vérifie (i) et (ii), alors L est le noyau de f.