Devoir 1

à remettre le 28 septembre 2017

Exercice 1. Soit $\mathcal{M} = \{A, B, C, D\}$, où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a. Est-ce que $\mathcal{M}$, muni du produit matriciel, est un groupe ? Si oui, identifier l'élément neutre, et identifier l'inverse de chaque élément de $\mathcal{M}$. Si non, expliquer pourquoi.

b. Existe-il un groupe G et une représentation matricielle $\rho : G \to \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ tels que $\mathcal{M}$ est l'image de ρ ?

Exercice 2. Soit $G = \langle x, y \mid x^3, y^5, (xy)^2 \rangle$ et $H = \langle x, yx^{-1}y^2 \rangle$.

a. Montrer que $[G : H] = 5$.

b. Soit $a = x$ et $b = yx^{-1}y^2$ les générateurs de H. Montrer que $a^3 = b^3 = (ab)^2 = 1$.

c. Montrer que $|H| \leq 12$. *(Considérer le groupe $\langle \alpha, \beta \mid \alpha^3, \beta^3, (\alpha\beta)^2 \rangle$ avec sous-groupe $\langle \alpha \rangle$.)*

d. Etant donné que le groupe alterné A_5 est engendré par les cycles $(1, 2, 3)$, $(2, 3, 4)$ et $(3, 4, 5)$, montrer que $G \cong A_5$.

Exercice 3. Soit G le groupe donné par la présentation $G = \langle a, b \mid a^4, b^2, b^{-1}aba \rangle$.

a. Montrer qu'il existe une représentation $Y : G \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ de G telle que

$$Y(a) = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y(b) = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

b. Trouver toutes les matrices T telles que $T\,Y(g) = Y(g)\,T$ pour tout $g \in G$.

c. Déterminer si la représentation Y est irréductible.