Devoir 2

à remettre le 26 octobre 2017

Exercice 1. Soit G le groupe cyclique d'ordre 3 :

$$G = \left\{e, g, g^2\right\}.$$

Soit V le $\mathbb{C}G$-module avec base (v_1, v_2) et action définie par

$$\begin{aligned} g \cdot v_1 &= v_2 \\ g \cdot v_2 &= -v_1 - v_2 \end{aligned}$$

Exprimer V comme somme directe de sous-modules irréductibles.

Exercice 2. Soit G un groupe fini et V un $\mathbb{C}G$-module de dimension finie.
Montrer que l'application $\pi : V \to V$ définie par

$$\pi(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot v \qquad \text{(pour tout } v \in V\text{)}$$

est un morphisme de $\mathbb{C}G$-modules tel que $\pi^2 = \pi$ et

$$\operatorname{im}(\pi) = \{v \in V : g \cdot v = v \text{ pour tout } g \in G\}.$$

Exercice 3. Soit G un groupe fini, H un sous-groupe de G, et V un $\mathbb{C}G$-module de dimension finie et non nulle.

a. Expliquer pourquoi on peut considérer V comme H-module.

b. Montrer que si H est un sous-groupe *abélien* de G, alors il existe $u \in V$, $u \neq 0$, tel que

$$hu \in \operatorname{vect}_{\mathbb{C}}\{u\} \ \text{ pour tout } h \in H.$$

c. Soit H un sous-groupe de G et $u \in V$ un vecteur non nul vérifiant

$$hu \in \operatorname{vect}_{\mathbb{C}}\{u\} \ \text{ pour tout } h \in H.$$

Montrer que si $G/H = \{g_1H, \dots, g_rH\}$ est l'ensemble de classes à gauche modulo H, alors

$$U = \operatorname{vect}_{\mathbb{C}}\{\ g_1u,\ g_2u,\ \dots,\ g_ru\ \}$$

est un sous-G-module de V.

d. Montrer que si V est un G-module simple et H est un sous-groupe abélien de G, alors

$$\dim(V) \leq \left|G/H\right|.$$

e. En déduire que tout G-module simple d'un groupe d'ordre 8 est de dimension 1 ou 2.