Devoir 3

à remettre le 30 novembre 2017

Exercice 1. Soit $\mathfrak{X}$ l'ensemble de parties de $\{1,2,3,4\}$ de cardinalité 2 :

$$\mathfrak{X} = \Big\{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\Big\}.$$

On définit une action du groupe symétrique S_4 sur $\mathfrak{X}$ par

$$\sigma \cdot \{i,j\} = \big\{\sigma(i),\sigma(j)\big\} \qquad (*)$$

où $\sigma \in S_4$ et $\{i,j\} \in \mathfrak{X}$.

a. Calculer le caractère χ de la représentation de S_4 définie par l'action $(*)$.

b. Décomposer χ en caractères irréductibles de S_4 (voir la figure 1).

	ε	$(1\,2)$	$(1\,2)(3\,4)$	$(1\,2\,3)$	$(1\,2\,3\,4)$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	1	-1
χ_3	2	0	2	-1	0
χ_4	3	-1	-1	0	1
χ_5	3	1	-1	0	-1

Figure 1 – Table de caractères de S_4.

Exercice 2. Soit G un groupe fini, et $g, h \in G$.

a. Montrer que g et h sont conjugués ssi $\chi(g) = \chi(h)$ pour tout caractère χ de G.

b. Montrer que g et g^{-1} sont conjugués ssi $\chi(g) \in \mathbb{R}$ pour tout caractère χ de G.

Exercice 3. Soit G le groupe défini par la présentation

$$G = \Big\langle\ a, b\ \Big|\ a^5,\ b^4,\ bab^{-1}a^{-2}\ \Big\rangle,$$

et $H = \langle b\rangle$ le sous-groupe de G engendré par b.

a. Appliquer l'algorithme de Todd-Coxeter pour montrer que G est d'ordre 20.

b. Montrer que G possède 4 caractères irréductibles de dimension 1.

c. Montrer que la représentation définie par l'action de G sur les sommets du graphe obtenu dans la partie (a) se décompose en somme directe de 2 représentations irréductibles.

d. Calculer la table de caractères de G.
(Indice: $\{e, a, b, b^2, b^3\}$ est un système de représentants des classes de conjugaison de G.)

e. Calculer les sous-groupes normaux de G.