

Comment rédiger des mathématiques et en particulier une thèse

Michèle Audin

Ce texte est un exercice un peu personnel inspiré du petit livre *How to write mathematics* [4] publié par l'AMS dans les années soixante-dix, et plus précisément des textes de Steenrod, Schiffer et surtout Halmos [3] qu'il contient. Le quatrième texte ne devrait être lu qu'une fois les trois premiers bien assimilés.

1. Préliminaires : pourquoi ? pour qui ?

On écrit parce qu'on a quelque chose à dire (et pas parce qu'il *faut* écrire une thèse), parce qu'on est content de ce qu'on a compris et qu'on souhaite le *communiquer* et l'expliquer. On ne commence donc pas une thèse par :

Le but de cette thèse est de munir son auteur du titre de Docteur.

sauf par antiphrase, pour un auteur certain que ce qu'il a mis dans sa thèse est tout à fait exceptionnel [1].

Donc dans la suite, je vais supposer qu'on a quelque chose à dire. Ça règle la question du pourquoi ? Maintenant, qui va lire ? Malheureusement, très peu de monde ; une façon à peine cynique de résumer la situation pourrait être : personne ne lit les articles, mais comme tout le monde lit les listes de publications, il faut quand même en écrire. Le point de vue plus optimiste : le directeur¹ va lire la thèse (ça arrive) et aussi deux rapporteurs, c'est toujours ça. J'ajouterai un lecteur très important (le seul sur lequel on puisse vraiment compter), l'auteur lui-même : le texte que vous écrivez, c'est un endroit où vous aurez fait le point sur un sujet, vous aurez besoin d'y revenir dans quelques mois ou quelques années.

Ça fait bien assez pour pouvoir commencer à écrire. Je ferai encore quelques remarques : on peut quand même (on doit) essayer d'attirer des lecteurs. Pour ça, il faut absolument aider quelqu'un qui aurait commencé à lire à continuer : le lecteur veut en lire le moins possible, c'est son droit, à vous de l'encourager, de l'obliger à en lire plus. Pour l'aider, il ne faut pas le surestimer, il faut tout lui expliquer. Le danger : que l'auteur ne se rappelle pas qu'elle est, elle², la *meilleure spécialiste du sujet*, avant le directeur de recherches, avant les rapporteurs, elle ne doit donc pas se sous-estimer.

2. Contenu, ordre

Avant de discuter du contenu de la thèse, une remarque : je suis bien en train de parler d'*écrire* et de *rédiger*, pas de *taper*. Je mets en garde contre un effet pervers de \TeX qui

¹J'ai distribué aléatoirement les sexes aux personnages de cette histoire, surtout quand ils-elles portaient un nom dont le féminin et le masculin étaient très différents.

²mais oui. . .

fait que n'importe quel brouillon³ en \TeX a l'air d'un texte publié.

Le contenu, c'est :

1. titre (auteur⁴)
2. introduction
3. texte
4. bibliographie

ce que je vais commenter, dans l'ordre

1. titre
2. notations
3. texte
4. introduction et bibliographie

et ensuite, je parlerai de l'ordre dans lequel tout ça peut s'écrire. Pour finir, je donnerai une liste d'exercices d'applications.

2.1. Le titre

C'est assez difficile⁵, il est certain que

Contributions à la théorie des groupes
O. Teur

est un mauvais titre, parce que prétentieux⁶ (pourquoi pas

Deux ou trois choses que je sais des mathématiques
O. Teur

?), qu'un bon titre doit être assez descriptif, mais pas trop long — encore que sur la page de titre d'une thèse, il y ait assez de place pour mettre un titre avec un sous-titre, genre

Le système de Duschmohl
(Utilisation des courbes algébriques en théorie des systèmes intégrables)
O. Teur

exemple dans lequel le système de Duschmohl doit être un système bien connu (des spécialistes!), sinon on peut faire l'inverse

Utilisation des courbes algébriques en théorie des systèmes intégrables
Le système de Duschmohl
O. Teur

³Celui-là, par exemple.

⁴J'ai déjà vu une thèse imprimée sur laquelle l'auteur avait oublié d'indiquer son nom.

⁵Personnellement j'ai beaucoup de mal avec les titres — j'ai publié un livre dont, en désespoir de cause, j'ai fait trouver le titre par l'éditeur de la collection.

⁶mais authentique. . .

mais en tous cas, on ne met pas de formule mathématique dans un titre, donc

$$\text{Etude du système } \begin{cases} q_1'' & = & F(q_1, q_2, q_1', q_2') \\ q_2'' & = & G(q_1, q_2, q_1', q_2') \end{cases}$$

n'est pas un titre. Les abréviations excessives, du type

Le système D
O. Teur

ne sont pas recommandées.

2.2. Les notations

Elles doivent être aussi standard que possible. Il est exclu d'écrire

Soit G le corps des nombres complexes

de même qu'il serait désagréable d'avoir à lire

Soit P la différentielle extérieure

ou

Soit ε un entier assez grand.

Il faut introduire aussi peu de notations que possible, mais le lecteur doit s'y retrouver : des *redondances* sont nécessaires. Supposons par exemple qu'on ait écrit au chapitre I

u^* désigne l'adjoint de u

et qu'il ne soit plus question d'adjoint aux chapitres II et III. Au chapitre IV, on utilise l'adjoint d'un opérateur v . Ça ne diminue en rien les qualités de l'auteur de remplacer

Alors, v^* vérifie...

par

Alors, l'adjoint v^* de v vérifie...

De plus, les notations doivent avoir une cohérence interne. Voilà un exemple : vous utilisez un espace vectoriel E et son dual E^* , et vous faites vraiment usage de la dualité. Une façon élégante d'aider le lecteur à s'y retrouver serait de décider de noter tous les vecteurs de E par des lettres latines et tous ceux de E^* par des lettres grecques. Ainsi on voit immédiatement que $\langle \xi, Y \rangle$ a un sens et que $\langle X, Y \rangle$ n'en a pas.

Évitez les sigles chers aux physiciens (cohomologie BRST, théorie LHOOQ⁷).

De même, il n'est pas indispensable d'introduire trop de termes techniques nouveaux. Il y en a énormément de mauvais, qu'on utilise tous les jours — *K-théorie*, notamment, mais on n'y peut plus rien, ou *ensemble de catégorie I*... — ce n'est pas la peine d'en rajouter. Par contre, il est indispensable de traduire des locutions comme *ϑ -fonction*, *r -matrix* ou *3-manifold*, qui se disent en français, faut-il le rappeler *fonction ϑ* (comme *la fonction f* , ni plus, ni moins), *matrice r* ou *variété de⁸ dimension 3*. Ce qui m'amène à...

⁷Ils doivent en tous cas toujours être prononçables.

⁸Et en tous cas pas 3-variété.

2.3. Le texte lui-même

D’abord, il est fait de *mots* — pour être brève, c’est avec un petit Robert [5] que vous écrivez, pas avec un petit livre de T_EX [6]. Vous avez le droit d’utiliser tous les mots de la langue, et le devoir d’essayer d’en utiliser plus de cinquante ou soixante. Les mots sont assemblés en phrases grâce à une grammaire aux règles de laquelle nul-le ne peut se soustraire — ce n’est pas parce qu’on sait qu’il ne faut pas diviser par zéro qu’on doit ignorer l’accord du participe passé (surtout employé avec être!). Comme dit Halmos [3] “C’est vrai qu’on peut faire une appendicectomie avec un couteau de cuisine...”. Un texte mathématique est, d’abord, un texte.

2.3.1. *Je, nous, les mots et les gens.* — L’activité de recherche est une activité humaine. Par exemple

... il est démontré dans [47] que...

est inutilement impersonnel (attention d’ailleurs à ces formes passives qui sont des anglicismes...)

... Mme X a démontré (voir [47]) que...

est à la fois du meilleur français et une information plus intéressante.

Le “nous” de politesse qui désigne l’auteur et son lecteur solidaires comme dans

Nous avons ainsi démontré que...

ne doit pas être utilisé n’importe comment. On n’écrit pas

Nous remercions notre père de...

sauf si on veut parler⁹ de Dieu (mais est-ce bien l’endroit de le faire?).

Il est indispensable de séparer ce qui est du discours explicatif, peut-être heuristique, de ce qui est énoncé précis, démonstration. On peut écrire

... dans tous les exemples que je connais, les fonctions f_1, \dots, f_k sont des polynômes...

mais pas

PRINCIPE GÉNÉRAL. — *Les fonctions f_1, \dots, f_k sont des polynômes...*

J’aime assez présenter un théorème comme suit

- motivations
- THÉORÈME. — *énoncé : autant que possible, des mots !*
- commentaires (un exemple, une remarque sur les hypothèses, peut-être même un mot sur la démonstration)
- *Démonstration.* — ... □

⁹Evidemment, deux sœurs dont le père aurait tapé l’article commun pourraient remercier celui-ci en ces termes, mais c’est une situation très exceptionnelle.

2.3.2. *Les énoncés.* — Oui, ce sont des mots. On dit souvent qu'un bon sujet, c'est la moitié d'une thèse. Un bon énoncé est aussi quelque chose de très difficile à concevoir et à écrire (c'est souvent plus difficile que d'en trouver une démonstration). La rédaction d'un énoncé peut être un moment de clarification très utile pour un auteur. Un théorème, c'est une hypothèse et une conclusion. Un énoncé avec une liste de dix hypothèses et une conclusion compliquée est un énoncé que son auteur ne s'est *pas* donné la peine de comprendre : on voit mal dans ces conditions pourquoi et comment le lecteur le comprendrait. Certaines hypothèses sont sans doute utilisées pour obtenir telle ou telle partie de la conclusion. Donc, en présence d'un résultat que vous croyez devoir rédiger ainsi, demandez-vous simplement où vous utilisez quoi... après tout, ça fera peut-être trois propositions au lieu d'une...

Remarque. — On n'écrit évidemment pas

THÉORÈME. — *Soit... . Donc on peut supposer que... . Alors...*

et encore moins

THÉORÈME. — *Soit... . Donc on peut appliquer le théorème 3 pour obtenir... . Alors...*

2.3.3. *Les démonstrations.* — Une démonstration n'est pas une plaisanterie — et en particulier les plus courtes ne sont pas toujours les meilleures. Une démonstration non rédigée n'existe tout simplement pas. La rédaction doit donc en être assez claire : il faut dégager les grandes étapes et les idées, voire les similitudes avec d'autres démonstrations. La démonstration doit pouvoir être comprise du lecteur¹⁰. Tournez sept fois la souris sur son petit tapis avant de taper

... il est bien clair que...

et ça pour deux raisons : d'abord, ce n'est peut-être pas si clair que ça (j'ai souvent eu bien du mal, quinze jours après, à me convaincre que ce qui était si clair était vrai...) et ensuite, c'est certainement là qu'est la faute, s'il y en a une (ça arrive...). Soyez solidaire du lecteur, aidez-le, plaignez-le si besoin est

... je ne connais malheureusement pas d'autre démonstration qu'un calcul, direct mais pénible...

et après tout, n'y aurait-il pas moyen de remplacer ce calcul par des mots

... on remplace p par q , on regroupe les termes, on permute les facteurs et on simplifie par r ...

Je recommande aussi de remplacer

Démonstration. — On applique 3.3.2, 2.4.6 et 2.7.8. \square
par

Démonstration. — Comme X est connexe (proposition 3.3.2) et f continue, $f(X)$ est connexe (théorème 2.4.6) donc c'est un intervalle (théorème 2.7.8). \square

2.3.4. *Les exemples.* — Il n'y a pas de bon texte mathématique sans exemple : les exemples sont le cœur des mathématiques. Ils doivent être pertinents et illustrer à la fois l'intérêt du sujet et les méthodes. L'idéal serait d'avoir un ou deux bons exemples à suivre tout le long du texte.

¹⁰Dois-je préciser que vous ne devez rien cacher ?

2.4. L'introduction (et la bibliographie)

C'est la chose la plus difficile à faire. Je crois qu'il faut y penser dès le début — ça aide à concevoir le plan du texte proprement dit — mais l'écrire à la fin. Elle doit, bien sûr, décrire le contenu du texte, mais pas seulement (une bonne table des matières le ferait presque aussi bien).

Elle *doit* expliquer

1. A quelle(s) question(s) vous allez répondre — pourquoi le problème est intéressant ? Quels sont les exemples fondamentaux qui justifient qu'on se pose ces questions ? Qu'est-ce qu'on savait sur le sujet avant cette thèse ? Par exemple

Le but de cette thèse est d'améliorer le théorème 3.2 de [17].

est un *très* mauvais début pour une introduction. Préférez-lui

Un très beau théorème, dû à Mme Y (voir [17], théorème 3.2) affirme que, pour toute fonction continûment dérivable... . Nous allons montrer ici que cette conclusion reste vraie si l'on suppose seulement la fonction lipschitzienne... .

Pour vous aider, imaginez que le lecteur a emporté votre thèse pour la lire et écrire le rapport dans le train, il faut qu'il se fasse une idée de ce que vous y faites sans bibliothèque.

2. Quelles méthodes vous utilisez (donnez une idée des démonstrations).

De plus, cette introduction doit laisser transparaître votre enthousiasme¹¹ pour un si beau sujet (si ça ne vous excite pas, on ne voit pas pourquoi ça exciterait le lecteur, qui a dix autres rapports à faire et ses propres articles à rédiger). Elle doit mettre le lecteur en appétit.

Une bonne bibliographie complète utilement une bonne introduction : il ne s'agit pas d'accumuler les références au cas où, mais

1. de rendre à Cléopâtre¹² ce qui appartient à Cléopâtre
2. d'aider le lecteur à s'y retrouver en lui indiquant les bons articles, ceux dans lesquels il va apprendre quelque chose. Donc, bien entendu, toutes les références doivent être *complètes*¹³.

2.5. L'ordre, le style

Il y a des tas de théories possibles. La meilleure est sans doute celle de la spirale : 12123123412345 etc... (voir [3]). A un certain stade, on peut chercher une victime non spécialiste (mais amicale) qui lise. Ça aide pour le style.

Enfin une remarque, sur le style, justement. Ecoutez les critiques, toutes les critiques, tenez-en compte, faites les corrections nécessaires... mais c'est *votre* texte, vous en êtes l'auteur... et ça serait vraiment dommage que X puisse avoir écrit la même chose que vous. De plus en plus, les textes mathématiques se ressemblent et c'est dommage. Défendez *votre* style.

¹¹Ecrire votre thèse avec un dictionnaire et avec enthousiasme serait un zeugme. Des procédés littéraires plus raffinés sont à votre disposition (voir [2]).

¹²Il va sans dire que tout énoncé qui ne vous est pas dû doit être accompagné d'une référence.

¹³Pas comme dans ce brouillon, par exemple.

3. Exercices

Ils sont presque tous dus à Halmos [3]. Essayez de comprendre pourquoi il ne faut pas écrire les phrases qui suivent, corrigez les et déduisez-en des préceptes généraux.

1. Si $a \in X$, alors on a $b \in Y$. Indication : où sont les verbes ?
2. Montrer qu'un nombre complexe s'écrit comme produit d'un nombre positif et d'un nombre de module 1. Indication : lequel ?
3. $\forall z, \exists u, \exists q ((z = qu) \wedge (|u| = 1) \wedge (q \geq 0))$. Indication : codage pour vous/décodage pour l'autre.
4. Si n est assez grand, $\frac{1}{n} < \varepsilon$ où ε est un nombre positif donné à l'avance.
5. ... où X et Y sont 2 surfaces de genre 2 (subtil).
6. La fonction $x^2 + 3$ est paire. Indication : $x^2 + 3$ est un nombre, une suite de symboles, ce que vous voulez, mais pas une fonction.
7. La réunion d'une suite d'ensembles mesurables est mesurable. Indication : une suite n'est pas qu'un ensemble dénombrable.
8. Soit A un anneau commutatif semi-simple. Si x et y sont dans A , on a $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$.
9. Si p , alors si q , alors r .
10. Supposons que $a \in X$. X est ...
11. Sur un compact, toute fonction continue f est bornée. Indication : qu'en est-il d'une fonction continue g ?
12. Si $0 \leq \lim u_n^{1/n} = \rho \leq 1$, alors $\lim u_n = 0$.

13.

$$(\star) \int_0^1 |f(x)|^2 dx < \infty$$

⋮

La fonction g vérifie (\star) .

Le dernier exercice serait de trouver tous les endroits dans ce texte, où les sages préceptes énoncés sont violés.

Bibliographie

- [1] A. DOUADY, Thèse.
- [2] G. PEREC, *Quel petit vélo à guidon chromé au fond de la cour ?*, Folio.
- [3] P. HALMOS, *How to write mathematics*, in [4].

- [4] N. STEENROD, P. HALMOS, M. SCHIFFER, J. DIEUDONNÉ, *How to write mathematics*, AMS, 1971.
- [5] *le petit Robert*, le Robert, 1993.
- [6] R. SEROUL, *Le petit livre de T_EX*, Interéditions, 1990.

Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université Louis Pasteur et CNRS
7 rue René-Descartes
F-67084 Strasbourg Cedex
maudin@math.u-strasbg.fr