Problème 1 de l'Examen Intra 1

Problème 1.

Soit G un groupe fini, $Z(G)$ le centre de G, V un $\mathbb{C}G$-module *simple*, et $\mathbb{C}^\times$ le groupe multiplicatif de nombres complexes non nuls.

a. Soit $z \in Z(G)$. Montrer que l'application $\varphi : V \to V$ définie par

$$\varphi(v) = zv$$

pour tout $v \in V$ est un morphisme de $\mathbb{C}G$-modules.

b. Montrer que, pour tout $z \in Z(G)$, il existe $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ tel que

$$zv = \lambda v \qquad \text{pour tout } v \in V.$$

c. Montrer que si l'élément neutre de G est le seul élément $g \in G$ vérifiant

$$gv = v \qquad \text{pour tout } v \in V,$$

alors $Z(G)$ est un groupe cyclique.

(Indice: tout sous-groupe fini de $\mathbb{C}^\times$ est cyclique.)