Examen Intra 1

Instructions.

1. Vous disposez de **1.5 heures** pour résoudre les problèmes suivants.
2. Il faut justifier toutes vos assertions clairement et proprement ; en particulier, il faut indiquer les résultats que vous utilisez.
3. Dans un problème en plusieurs parties, vous pouvez utiliser le résultat d'une partie précédente, même si vous ne l'avez pas résolu.

(15 pts) **Problème 1.** Soit G un groupe fini, $Z(G)$ le centre de G, V un $\mathbb{C}G$-module *simple*, et $\mathbb{C}^\times$ le groupe multiplicatif de nombres complexes non nuls.

a. Soit $z \in Z(G)$. Montrer que l'application $\varphi : V \to V$ définie par
$$\varphi(v) = zv$$
pour tout $v \in V$ est un morphisme de $\mathbb{C}G$-modules.

b. Montrer que, pour tout $z \in Z(G)$, il existe $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ tel que
$$zv = \lambda v \qquad \text{pour tout } v \in V.$$

c. Montrer que si l'élément neutre de G est le seul élément $g \in G$ vérifiant
$$gv = v \qquad \text{pour tout } v \in V,$$
alors $Z(G)$ est un groupe cyclique. (*Indice: tout sous-groupe fini de $\mathbb{C}^\times$ est cyclique.*)

(15 pts) **Problème 2.** Soit
$$G = \left\langle x, y \mid x^2, y^3, (xy)^4 \right\rangle \qquad \text{et} \qquad H = \langle xy \rangle .$$

a. Utiliser l'algorithme de Todd–Coxeter pour montrer que $[G : H] = 6$ et pour calculer une représentation par permutations de G.

b. En déduire que $|G| = 24$.

(15 pts) **Problème 3.** Pour chaque énoncé, déterminer s'il est vrai ou faux et justifier les réponses. Soit G un groupe fini.

a. L'intersection de deux sous-modules simples d'un G-module est un sous-module simple.

b. La somme directe de deux modules simples est simple.

c. Toute représentation de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est de dimension 1.

d. Le module régulier de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{C}$ se décompose en somme directe de 2 sous-modules simples.

e. Si V est un G-module simple, alors la représentation correspondante est injective.