Problème 1 de l'Examen Intra 2

Problème 1.

Soit H un sous-groupe d'un groupe fini G, et V un $\mathbb{C}G$-module qui a un *sous-espace* W vérifiant

$$h\vec{w} \in W \text{ pour tous } h \in H,\ \vec{w} \in W.$$

(Autrement dit, W est un sous-H-module de V.)

a. Pour $g \in G$, on définit

$$gW = \{g\vec{w} : \vec{w} \in W\}.$$

Montrer que, pour tous $g_1, g_2 \in G$, si $g_1H = g_2H$, alors $g_1W = g_2W$.

b. Supposons qu'il existe $x \in G$ tel que $G/H = \{H, xH\}$ et

$$V = W \oplus xW.$$

Si ψ est le caractère du H-module W et χ est le caractère du G-module V, montrer que

$$\chi(g) = \begin{cases} \psi(g) + \psi(x^{-1}gx), & \text{si } g \in H, \\ 0, & \text{si } g \notin H. \end{cases}$$

(Indice: Si $(b_1, \ldots, b_d)$ est une base de W, alors $(xb_1, \ldots, xb_d)$ est une base de xW.)