Feuille d'exercices 2 : Groupes symétriques

Exercice 1.

a. Donner un exemple d'un homomorphisme non-trivial de $\mathbb{Z}$ dans S_3.

b. Est-il possible de construire un homomorphisme surjectif de $\mathbb{Z}$ dans S_3 ?

Exercice 2. Soit α et β les deux permutations suivantes.

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a. Calculer les sous-groupes $\langle \alpha \rangle$, $\langle \beta \rangle$, et $\langle \alpha, \beta \rangle$ de S_4.

b. Montrer que $\langle \alpha, \beta \rangle$ et $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$ sont isomorphes.

c. Déterminer tous les homomorphismes de $\langle \alpha, \beta \rangle$ dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Pour chaque homomorphisme, déterminer son noyau et son image.

Exercice 3. Soit $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_{l-1}, a_l)$ un cycle dans S_n. La *longueur* de α est l. Le support de α est l'ensemble $\{a_1, a_2, \ldots, a_{l-1}, a_l\}$. On dit que deux cycles sont à *disjoint* si leurs supports sont disjoint.

a. Montrer que $\alpha^{-1} = (a_l, a_{l-1}, \ldots, a_2, a_1)$.

b. Montrer que l'ordre de α est l. Montrer que l'ordre de α^{-1} est l.

c. Montrer que si α est un cycle de longueur impair, alors α^2 est aussi un cycle.

d. Montrer que $\alpha\beta = \beta\alpha$ si α et β sont des cycles à supports disjoints.

e. Soit σ une permutation quelconque dans S_n. Montrer que

$$\sigma\alpha\sigma^{-1} = (\sigma(a_1), \sigma(a_2), \ldots, \sigma(a_l))\,.$$

f. Soit $\sigma \in S_n$. Montrer que σ se décompose de manière unique en produit de cycles disjoints (à l'ordre des facteurs près). Par example, pour la permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 5 & 7 & 6 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

on a

$$\sigma = (1, 3, 5, 6)(2, 4, 7, 8).$$

g. Le *type cyclique* d'une permutation σ est le partage de n donnée par les longueurs des cycles dans la décomposition de σ en produit de cycles disjoints. Montrer que deux permutations sont conjugués ssi ils ont le même type cyclique.

h. Montrer que σ et son inverse σ^{-1} sont conjugués.

i. Soit σ une permutation dans S_n, où $n \geq 3$. Montrer que si $\sigma\omega = \omega\sigma$ pour tout $\omega \in S_n$, alors σ est l'élément neutre de S_n.

Exercice 4. Montrer que toute permutation de S_n se décompose en produit des permutations suivantes :

a. $(1,2)$, $(1,3)$, $(1,4)$, …, $(1,n)$. (*Indice :* $(a_1,a_2,\ldots,a_p)=(a_1,a_p)(a_1,a_{p-1})\cdots(a_1,a_2)$.)

b. $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,4)$, …, $(n-1,n)$. (*Indice :* $(3,4)=(1,3)(1,4)(1,3)^{-1}$.)

c. $(1,2)$, $(1,2,3,\ldots,n)$.

d. $(1,2)$, $(2,3,\ldots,n)$.

(Autrement dit, les ensembles ci-dessus sont des parties génératrices de S_n.)

Exercice 5. Soit $n\geq 2$. On appelle *signature d'une permutation* $\omega\in S_n$ le nombre

$$\operatorname{sign}(\omega)=\prod_{1\leq i<j\leq n}\frac{\omega(i)-\omega(j)}{i-j},$$

où le produit porte sur tous les couples (i,j) tels que $i<j$. Par exemple, pour $\omega=\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{smallmatrix}\right)$,

$$\begin{aligned}\operatorname{sign}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}&=\left(\frac{\omega(1)-\omega(2)}{1-2}\right)\times\left(\frac{\omega(1)-\omega(3)}{1-3}\right)\times\left(\frac{\omega(2)-\omega(3)}{2-3}\right)\\&=\left(\frac{2-3}{1-2}\right)\times\left(\frac{2-1}{1-3}\right)\times\left(\frac{3-1}{2-3}\right)\\&=1\end{aligned}$$

a. Une *inversion* de $\omega\in S_n$ est un couple (i,j) tel que $1\leq i<j\leq n$ et $\omega(i)>\omega(j)$. Soit $\operatorname{inv}(\omega)$ l'ensemble d'inversions de ω. Montrer que $\operatorname{sign}(\omega)=(-1)^{|\operatorname{inv}(\omega)|}$.

b. Calculer la signature de tous les éléments de S_3.

c. Montrer que toute transposition de S_n est de signature -1.

d. Montrer que sign est un homomorphisme de S_n dans le groupe multiplicatif $\{1,-1\}$. (*Indice : on peut le faire directement ou à l'aide d'une présentation de S_n.*)

e. Une *permutation paire* est une permutation qui peut être exprimée comme le produit d'un nombre pair de transpositions ; une *permutation impaire* est une permutation qui peut être exprimée comme le produit d'un nombre impair de transpositions. Montrer que $\operatorname{sign}(\sigma)=1$ si σ est paire ; et $\operatorname{sign}(\sigma)=-1$ si σ est impaire.

f. L'ensemble des permutations paires dans S_n forme le *groupe alterné* A_n. Montrer que A_n est un sous-groupe normal de S_n.

g. Montrer que $|A_n|=\frac{n!}{2}$.

h. Montrer que A_n est engendré par tous les cycles de longueur 3 (tout d'abord, remarquer qu'il suffit de montrer que le produit de deux transpositions est un produit de cycles de longueurs 3 ; ensuite, montrer que $(a,b)(a,b)=id$; $(a,b)(b,c)=(a,b,c)$; et $(a,b)(c,d)=(a,b,c)(b,c,d)$).

i. Montrer que A_4 est engendré par les cycles $(1,2,3)$ et $(2,3,4)$. Calculer le graphe de Cayley de A_4 pour la partie génératrice $\{(1,2,3),(2,3,4)\}$.