Feuille d'exercices 4

Représentations

Exercice 1. Soit D_4 le groupe des isométries du carré à sommets $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$ et $(1,-1)$ dans $\mathbb{R}^2$.

a. Choisir une base de $\mathbb{R}^2$ et exprimer les isométries dans cette base.

b. Déterminer si cette représentation matricielle de D_4 est irréductible.

Exercice 2. *(Restriction d'une représentation à une sous-groupe)* Soit $\xi : S_3 \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ la représentation standard de S_3, et H le sous-groupe de S_3 engendré par le cycle $(1,2,3)$.

a. Montrer que la restriction $\xi|_H : H \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ est une représentation de H.

b. Montrer que cette représentation n'est pas irréductible.

Exercice 3. Soit $\rho : G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ une représentation matricielle de G de dimension n. Montrer que l'application $g \mapsto \det(\rho(g))$ est une représentation de G de dimension 1.

Exercice 4. Soit $\varphi : H \to G$ un morphisme de groupes et $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation.

a. Montrer que la composition $\rho \circ \varphi$ est une représentation de H.

b. Montrer que si ρ est irréductible et φ est surjectif, alors $\rho \circ \varphi$ est irréductible.

Sous-modules / sous-modules simples

Exercice 5. Soit $\mathbb{C}S_n$ le module régulier du groupe symétrique S_n. Rappeler que $\mathbb{C}S_n$ a une base $\mathcal{B} = \{v_\tau : \tau \in S_n\}$ indexée par les éléments de S_n dont la multiplication par $\sigma \in S_n$ est

$$\sigma \cdot v_\tau = v_{\sigma\circ\tau}.$$

Montrer que le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}S_n$ engendré par l'élément $\sum_{\tau\in S_n} \mathrm{sign}(\tau)\, v_\tau$ est un sous-module de $\mathbb{C}S_n$ de dimension 1.

Exercice 6. Soit U et W deux sous-modules d'un G-module V.

a. Montrer que $U \cap W$ est un sous-module de V.

b. Montrer que si U est simple, alors $U \cap W = \{0\}$ ou $U \cap W = U$.

c. Montrer que si U et W sont simple, alors $U \cap W = \{0\}$ ou $U = W$.

Exercice 7. Soit G un groupe fini et V un G-module sur $\mathbb{C}$ de dimension 3. Montrer que V est simple ssi il n'existe pas un vecteur $v \in V$ tel que $gv \in \mathbb{C}v$ pour tout $g \in G$.

Théorème de Maschke

Exercice 8. Soit G un groupe fini et $g \in G$. Montrer que $\rho(g)$ est la matrice identité pour toute représentation irréductible $\rho : G \to \mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$ ssi $g = e$ (élément neutre de G). Autrement dit,

$$\bigcap_{\substack{\rho:G\to\mathrm{GL}_d(\mathbb{C})\\ \rho \text{ irréductible}}} \ker(\rho) = \{e\}.$$

(Indice: appliquer le Théorème de Maschke à la représentation régulière.)

Exercice 9. (*Contre-example au Théorème de Maschke dont la caractèristique du corps divise l'ordre du groupe.*) Soit p un nombre premier, $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $C_p = \{1, g, g^2, \ldots, g^{p-1}\}$ le groupe cyclique à p éléments. Soit $\varphi : C_p \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ l'application définie par

$$\varphi(g^j) = \begin{pmatrix} 1 & j \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pour tout $j \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$.

a. Montrer que $V = \mathbb{F}_p^2$ est un C_p-module de dimension 2.

b. Montrer que le sous-espace U de V engendré par e_1 est un sous-module de V.

c. Montrer qu'il n'existe pas de sous-module W de V tel que $V = U \oplus W$.

Sommes directes

Exercice 10. Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Une transformation linéaire $\pi : V \to V$ est une *projection* si $\pi \circ \pi = \pi$. Montrer que si $\pi : V \to V$ est une projection, alors $V = \mathrm{im}(\pi) \oplus \ker(\pi)$.

Exercice 11. Soit U et W deux sous-modules d'un G-module V.

a. Montrer que $U \cap W$ est un sous-module de V.

b. Montrer que $U + W = \{u + w : u \in U, w \in W\}$ est un sous-module de V.

c. Montrer que $V = U \oplus W$ ssi $V = U + W$ et $U \cap W = \{0\}$.