Feuille d'exercices 5

Exercice 1. Soit $\mathbb{K}$ un corps et A, B deux matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$. Montrer que

a. $\operatorname{trace}(A+B) = \operatorname{trace}(A) + \operatorname{trace}(B)$.

b. $\operatorname{trace}(\lambda A) = \lambda \operatorname{trace}(A)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

c. $\operatorname{trace}(AB) = \operatorname{trace}(BA)$.

d. $\operatorname{trace}(A) = \operatorname{trace}(PAP^{-1})$ pour tous $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 2. Soit X une représentation matricielle d'un groupe fini G de caractère χ. On définit une fonction $\det(\chi) : G \to \mathbb{C}$ par $\det(\chi(g)) = \det(X(g))$. Montrer que $\det(\chi)$ est un caractère linéaire de G.

Exercice 3. Pour deux fonctions χ et ψ quelconques de G vers $\mathbb{C}$, on définit

$$\langle \chi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g)\overline{\psi(g)}.$$

Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un *produit scalaire complexe* sur l'espace des fonctions de G vers $\mathbb{C}$. Explicitement, montrer que :

a. $\langle \chi, \psi \rangle = \overline{\langle \psi, \chi \rangle}$, où $\overline{z}$ dénote le conjugué complexe d'un nombre complexe z ;

b. $\langle \alpha\chi + \alpha'\chi', \psi \rangle = \alpha\langle \chi, \psi \rangle + \alpha'\langle \chi', \psi \rangle$ pour tous $\alpha, \alpha' \in \mathbb{C}$ et $\chi, \chi', \psi : G \to \mathbb{C}$;

c. $\langle \chi, \chi \rangle > 0$ si $\chi \neq 0$.

Exercice 4. Soit $Y : S_3 \to \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ la représentation matricielle suivante.

$$Y([123]) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad Y([132]) = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$Y([231]) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad Y([213]) = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$Y([312]) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad Y([321]) = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

a. Calculer le caractère de Y.

b. Déterminer si Y est une représentation irréductible.

c. Si Y n'est pas irréductible, décomposer Y en représentations irréductibles.

Exercice 5. Le *groupe des quaternions*, noté Q, est le groupe d'ordre 8 avec éléments

$$Q = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$$

et relations :

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \qquad \text{et} \qquad (-1)^2 = 1.$$

a. Montrer que

$$\rho(-1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \rho(i) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad \rho(j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \rho(k) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

se prolonge en une représentation sur $\mathbb{C}$ de Q.

b. Calculer le caractère de la représentation ρ.

c. Montrer que la représentation ρ est irréductible.

d. Montrer que le sous-groupe dérivé de Q est $Q' = \{1, -1\}$.

e. Montrer que $Q/Q' \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

f. En déduire qu'il y a exactement 4 autres représentations irréductibles de Q, et qu'elles sont toutes de dimension 1.

g. Calculer la table de caractères de Q. *(Indice: utiliser les caractères de Q/Q')*

Exercice 6. Soit D_4 le groupe diédral (isométries du carré).

a. Écriver les éléments de D_4 comme des permutations des sommets du carré.

b. Choisir une base du plan et exprimer les isométries dans la base.

c. Calculer le caractère de cette représentation matricielle.

d. Montrer que cette représentation matricielle est irréductible.

e. Calculer le sous-groupe dérivé de D_4. En déduire que $D_4/D_4' \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

f. En déduire qu'il y a exactement 4 autres représentations irréductible de D_4, et qu'elles sont toutes de dimension 1.

g. Calculer la table de caractères de D_4 *(Indice: utiliser les caractères de D_4/D_4')*

Exercice 7. Comparer les tables de caractères de Q et D_4. Réflechir sur la signification.