Feuille d'exercices 6

Exercice 1. Soit $\chi_{rég}$ le caractère de la représentation régulière d'un groupe fini G. Montrer que pour tout caractère ψ de G, on a $\langle \chi_{rég}, \psi \rangle = \psi(e)$.

Exercice 2. Soit S_n le groupe symétrique. Montrer que la fonction $\chi : S_n \to \mathbb{C}$ définie par

$$\chi(\sigma) = \Big| \{1 \leq i \leq n : \sigma(i) = i\} \Big| - 1,$$

pour toute permutation $\sigma \in S_n$, est un caractère de S_n.

Exercice 3. Soit G un groupe fini, $Z(G)$ le centre de G, et $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_k$ les caractères irréductibles de G.

a. Montrer que

$$Z(G) = \left\{ g \in G : \sum_{i=1}^{k} \chi_i(g)\chi_i(g^{-1}) = |G| \right\}.$$

b. Montrer que

$$Z(G) = \bigcap_{i=1}^{k} \{g \in G : |\chi_i(g)| = \chi_i(e)\}.$$

c. Montrer que si χ est un caractère irréductible de G tel que $\ker(\chi) = \{e\}$, alors

$$Z(G) = \{g \in G : |\chi(g)| = \chi(e)\}.$$

Exercice 4. Soit G un groupe fini et H un sous-groupe de G. Si ψ est un caractère irréductible de H, alors il existe un caractère irréductible χ de G tel que

$$\left\langle \chi\big|_H, \psi \right\rangle_H \neq 0.$$

Ici,

- $\chi\big|_H$ est la restriction de la fonction $\chi : G \to \mathbb{C}$ à H ; et
- $\left\langle \chi\big|_H, \psi \right\rangle_H$ est le produit scalaire défini sur l'ensemble de fonctions sur H ; c'est-à-dire,

$$\langle \tau, \psi \rangle_H = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \tau(h)\overline{\psi(h)}$$

(*Indice: Calculer le produit scalaire du caractère régulier de G et ψ de deux façons différentes.*)

Exercice 5. Soit ρ une représentation matricielle complexe d'un groupe fini G.

a. Montrer que l'application $\delta(g) = \det(\rho(g))$ est un caractère linéaire de G.

b. Montrer que $G/\ker(\delta)$ est abélien.

c. Montrer que si G possède un élément g tel que $\delta(g) = -1$, alors G possède un sous-groupe normal d'indice 2.

Exercice 6. Soit χ un caractère d'un groupe fini G et g un élément d'ordre 2 de G.

a. Montrer que $\chi(g)$ est un entier.

b. Montrer que $\chi(g) \equiv \chi(e) \bmod 2$, où e est l'élément neutre de G.

c. Montrer que $\chi(g) \equiv \chi(e) \bmod 4$ ou G possède un sous-groupe normal d'indice 2.

Exercice 7. Soit G le sous-groupe du groupe symétrique S_7 engendré par les permutations suivantes.

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

a. Vérifier que $a^7 = \epsilon$, $b^3 = \epsilon$, $b^{-1}aba^{-2} = \epsilon$, où ϵ est la permutation identité.

b. Montrer que G est d'ordre 21.

c. Calculer les classes de conjugaison de G.

d. Calculer la table de caractères de G.

Exercice 8 ! Soit G un groupe fini dont le centre de tout sous-groupe de Sylow de G est cyclique. Montrer que G possède un caractère irréductible χ vérifiant $\ker(\chi) = \{e\}$.