Feuille d'exercices 7

Exercice 1. Soit V, W des espaces vectoriels. Montrer que si $\dim(W) = 1$, alors $V \otimes W \cong V$.

Exercice 2. Soit G un groupe fini, et V et W des G-modules sur $\mathbb{C}$ tels que $\dim(W) = 1$. Montrer que $V \otimes W$ est un G–module simple ssi V est un G–module simple.

Exercice 3. Soit V_{triv}, V_{signe} et V_{std} les S_4–modules trivial, signe et standard, resp.

a. Calculer les caractères et les dimensions des S_4–modules suivants :

- $S(V_{\text{triv}} \otimes V_{\text{triv}})$
- $A(V_{\text{signe}} \otimes V_{\text{signe}})$
- $A(V_{\text{std}} \otimes V_{\text{std}})$
- $S((V_{\text{triv}} \oplus V_{\text{signe}}) \otimes (V_{\text{triv}} \oplus V_{\text{signe}}))$

b. Déterminer si les S_4–modules ci-dessus sont simples.

Exercice 4. Soit H le sous-groupe de S_3 engendré par la permutation $c = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et ρ la représentation de H définie par

$$\begin{array}{rcl} \rho : H & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ c & \longmapsto & e^{\frac{2i\pi}{3}} \end{array}$$

Soit $\mathrm{Ind}_H^{S_3}(\rho)$ la représentation de S_3 induite par ρ.

a. En déduire que la dimension de $\mathrm{Ind}_H^{S_3}(\rho)$ est égale à 2.

b. Calculer les matrices de tout élément $\sigma \in S_3$ dans la représentation $\mathrm{Ind}_H^{S_3}(\rho)$. Par exemple, la matrice de la permutation $c = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ est

$$\begin{pmatrix} e^{\frac{2i\pi}{3}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{4i\pi}{3}} \end{pmatrix}.$$

c. Calculer le caractère de $\mathrm{Ind}_H^{S_3}(\rho)$:

(a) en utilisant les matrices obtenues dans la partie précédente ; et

(b) à l'aide de la formule d'un caractère induit.

d. Exprimer le caractère de $\mathrm{Ind}_H^{S_3}(\rho)$ comme somme de caractères irréductibles.

e. Exprimer le caractère de $\mathrm{Res}_{S_2}^{S_3}(\mathrm{Ind}_H^{S_3}(\rho))$ comme somme de caractères irréductibles de S_2, où on identifie S_2 avec le sous-groupe de S_3 engendré par la permutation $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$.

Exercice 5. Soit H un sous-groupe de G et ψ un caractère de H. Montrer que

$$\operatorname{Ind}_H^G(\psi)(e) = \frac{|G|}{|H|}\psi(e).$$

Exercice 6. Soit H un sous-groupe d'un groupe fini G et ψ un caractère de H. Montrer que si H est normal dans G, alors $\operatorname{Ind}_H^G(\psi)(g) = 0$ pour tout $g \notin H$.

Exercice 7. Soit H un sous-groupe de G, ψ un caractère de H, et f une fonction centrale sur G. Montrer que

$$\left\langle \operatorname{Ind}_H^G(\psi), f \right\rangle_G = \langle \psi, f|_H \rangle_H$$

Exercice 8. Soit H un sous-groupe de G, ψ un caractère de H, et χ un caractère de G.

a. Expliquer pourquoi le produit $\chi \operatorname{Ind}_H^G(\psi)$ est un caractère de G.

b. Expliquer pourquoi le produit $\psi \operatorname{Res}_H^G(\chi)$ est un caractère de H.

c. Expliquer pourquoi $\operatorname{Ind}_H^G(\psi \operatorname{Res}_H^G(\chi))$ est un caractère de G.

d. Montrer que

$$\operatorname{Ind}_H^G(\psi \operatorname{Res}_H^G(\chi)) = \chi \operatorname{Ind}_H^G(\psi).$$

(*Indice: Calculer le produit scalaire avec un caractère irréductible de G.*)

Exercice 9 ! Soit H un sous-groupe de G, et $\chi_1, \ldots, \chi_k$ les caractères irréductibles de G. Pour tout caractère irréductible ψ de H, il existe $d_1, d_2, \ldots, d_k \in \mathbb{N}$ tels que

$$\operatorname{Ind}_H^G(\psi) = d_1\chi_1 + d_2\chi_2 + \cdots + d_k\chi_k.$$

Montrer que

$$d_1^2 + d_2^2 + \cdots + d_k^2 \leq [G : H].$$