Devoir 1

à remettre le 5 février 2019 (mis à jour le 25 janvier 2019)

Algorithme de Todd–Coxeter

Exercice 1. Soit

$$G = \left\langle x, y \mid x^3, y^5, (xy)^2 \right\rangle \quad \text{et} \quad H = \left\langle x, yx^{-1}y^2 \right\rangle.$$

a. Utiliser l'algorithme de Todd–Coxeter vu en classe pour calculer $[G : H]$.

b. Soit $a = x$ et $b = yx^{-1}y^2$ les générateurs de H. Montrer que $a^3 = b^3 = (ab)^2 = 1$.

c. En déduire que $|H| \leq 12$.

d. Montrer que $|G| = 60$.

e. Montrer que $G \cong A_5$.

Calcul dans un groupe de permutations

Exercice 2. Soit G le sous-groupe de S_7 engendré par les permutations

$$a = (1\,2)(3\,4) \qquad \text{et} \qquad b = (2\,3\,5)(4\,6\,7).$$

En utilisant les algorithmes vus en classe :

a. Calculer l'orbite $\mathrm{Orb}_G(1)$ et un système de représentants de $\mathrm{Stab}_G(1)$ dans G.

b. Montrer que $\mathrm{Stab}_G(1) = \Big\langle (2\,3\,5)(4\,6\,7), (3\,4)(5\,7) \Big\rangle$.

c. Calculer une base $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, x_3\}$ pour G.

d. Calculer l'ordre de G.

e. Déterminer si les permutations suivantes sont des éléments de G.
Si oui, exprimer la permutation comme un produit de générateurs de G.

$$\rho = (1\,7\,4)(2\,5)(3\,6) \qquad \sigma = (1\,5\,4\,3\,2\,6\,7) \qquad \tau = (1\,3\,6\,2\,5\,7\,4)$$

Théorème de Maschke

Exercice 3. Soit G un groupe fini et $g \in G$. Montrer que $\rho(g)$ est la matrice identité pour toute représentation irréductible $\rho : G \to \mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$ ssi $g = e$ (élément neutre de G). Autrement dit,

$$\bigcap_{\substack{\rho : G \to \mathrm{GL}_d(\mathbb{C}) \\ \rho \text{ irréductible}}} \ker(\rho) = \{e\}.$$

(*Indice: appliquer le Théorème de Maschke à la représentation régulière de G.*)