Devoir 2

à remettre le 12 mars 2019

Exercice 1. Soit $\mathfrak{X}$ l'ensemble de parties de $\{1,2,3,4\}$ de cardinalité 2 :

$$\mathfrak{X} = \Big\{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\Big\}.$$

On définit une action du groupe symétrique S_4 sur $\mathfrak{X}$ par

$$\sigma \cdot \{i,j\} = \big\{\sigma(i),\sigma(j)\big\} \qquad (*)$$

où $\sigma \in S_4$ et $\{i,j\} \in \mathfrak{X}$. En associant à toute permutation $\sigma \in S_4$ la matrice de la permutation qui correspond à l'action de σ sur $\mathfrak{X}$, on obtient une représentation matricielle de S_4. Par exemple, à la permutation $(2\,3) \in S_4$ on associe la matrice suivante.

$$\begin{array}{c} \\ \{1,2\} \\ \{1,3\} \\ \{1,4\} \\ \{2,3\} \\ \{2,4\} \\ \{3,4\} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \{1,2\} & \{1,3\} & \{1,4\} & \{2,3\} & \{2,4\} & \{3,4\} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

a. Calculer le caractère χ de la représentation de S_4 définie par l'action $(*)$.

b. Décomposer χ en caractères irréductibles de S_4 (voir la figure 1).

	ε	$(1\,2)$	$(1\,2)(3\,4)$	$(1\,2\,3)$	$(1\,2\,3\,4)$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	1	-1
χ_3	2	0	2	-1	0
χ_4	3	-1	-1	0	1
χ_5	3	1	-1	0	-1

Figure 1 – Table de caractères de S_4.

Exercice 2. Soit G un groupe fini et N un sous-groupe ***normal*** de G.

a. Soit τ un caractère de G/N. Montrer que la fonction $\chi : G \to \mathbb{C}$ définie par

$$\chi(g) = \tau(gN) \text{ pour tout } g \in G$$

est un caractère de G.

b. Montrer que si τ est irréductible, alors χ est irréductible.

Exercice 3. Posons

$$G = \left\langle\ a, b\ \middle|\ a^3,\ b^4,\ ababab^{-1}\ \right\rangle.$$

La table suivante présente la taille et un représentant de chaque classe de conjugaison de G.

représentant de la classe de conjugaison	e	a	a^2	b	b^2	ab	a^2b^2
taille de la classe de conjugaison	1	4	4	6	1	4	4

a. Montrer que le sous-groupe dérivé de G est

$$G' = \langle b,\ aba^{-1}\rangle.$$

b. Calculer les caractères linéaires de G.

c. Posons H le sous-groupe de G engendré par ab. Calculer le caractère de la représentation par permutations de G sur les classes à droite de H.

d. Décomposer le caractère trouvé à la partie précédente en caractères irréductibles de G.

e. Posons $\omega = e^{2\pi i/3}$. Montrer que la correspondance

$$a \mapsto \begin{bmatrix} \omega & 0 \\ \omega & \omega^2 \end{bmatrix} \qquad b \mapsto \begin{bmatrix} -\omega & \omega \\ 1 & \omega \end{bmatrix}$$

se prolonge en une représentation complexe *irréductible* de G.

f. Trouver la table de caractères de G.