Devoir 3

à remettre le 9 avril 2019

Exercice 1. Soit χ est un caractère d'un groupe fini G. On note par $\det(\chi)$ l'application de G dans $\mathbb{C}$ définie par

$$\det(\chi)(g) = \det(\rho(g)) \qquad \text{pour tout } g \in G,$$

où ρ est une représentation de G de caractère χ.

a. Montrer que $\det(\chi)$ est bien-définie : plus précisément, montrer que si ρ et ρ' sont deux représentations de G de caractère χ, alors $\det(\rho(g)) = \det(\rho'(g))$ pour tout $g \in G$.

b. Montrer que $\det(\chi)$ est un caractère linéaire de G.

c. Montrer que si $\chi(e) = 2$, alors $\chi_A = \det(\chi)$.

d. Montrer que si $\chi(e) = 2$, alors $\iota(\chi) = -1$ ssi $\det(\chi) = \mathbb{1}_G$,
où $\iota(\chi)$ est l'indicateur de Frobenius–Schur de χ, et $\mathbb{1}_G$ est le caractère trivial de G.

e. Soit χ et ψ deux caractères de G. Exprimer $\det(\chi\psi)$ en termes de $\det(\chi)$ et $\det(\psi)$.

f. Soit H un sous-groupe de G et ψ un caractère de H tel que $\det(\psi) = \mathbb{1}_H$.
Posons $\chi = \mathrm{Ind}_H^G(\psi)$. Montrer que $\det(\chi)^2 = \mathbb{1}_G$.

Exercice 2. Soit H le sous-groupe de S_3 engendré par la permutation $c = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et ρ la représentation de H définie par

$$\begin{aligned} \rho : H &\longrightarrow \mathbb{C} \\ c &\longmapsto \omega, \end{aligned}$$

où $\omega = e^{2\pi i/3}$. Soit $\mathrm{Ind}_H^{S_3}(\rho)$ la représentation de S_3 induite par ρ.

a. Montrer que la dimension de la représentation induite $\mathrm{Ind}_H^{S_3}(\rho)$ est égale à 2.

b. Calculer les matrices de tout élément $\sigma \in S_3$ dans la représentation induite $\mathrm{Ind}_H^{S_3}(\rho)$.

c. Calculer le caractère de $\mathrm{Ind}_H^{S_3}(\rho)$:
 (i) en utilisant les matrices obtenues dans la partie précédente ; et
 (ii) à l'aide de la formule d'un caractère induit : $\mathrm{Ind}_H^G(\chi) = \frac{1}{|H|}\sum_{a \in G} \widehat{\chi}(a^{-1}ga)$.

d. Exprimer le caractère de $\mathrm{Ind}_H^{S_3}(\rho)$ comme somme de caractères irréductibles de S_3.

e. Soit S_2 le sous-groupe de S_3 engendré par la permutation $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$.
Exprimer $\mathrm{Res}_{S_2}^{S_3}(\mathrm{Ind}_H^{S_3}(\rho))$ comme somme de caractères irréductibles de S_2.

Exercice 3. Soit H un sous-groupe de G, ψ un caractère de H, et χ un caractère de G.

a. Expliquer pourquoi le produit $\chi \operatorname{Ind}_H^G(\psi)$ est un caractère de G.

b. Expliquer pourquoi le produit $\psi \operatorname{Res}_H^G(\chi)$ est un caractère de H.

c. Expliquer pourquoi $\operatorname{Ind}_H^G\big(\psi \operatorname{Res}_H^G(\chi)\big)$ est un caractère de G.

d. Montrer que

$$\operatorname{Ind}_H^G\Big(\psi \operatorname{Res}_H^G(\chi)\Big) = \chi \operatorname{Ind}_H^G(\psi).$$

(*Indice: Calculer le produit scalaire des deux côtés avec tout caractère irréductible de G.*)