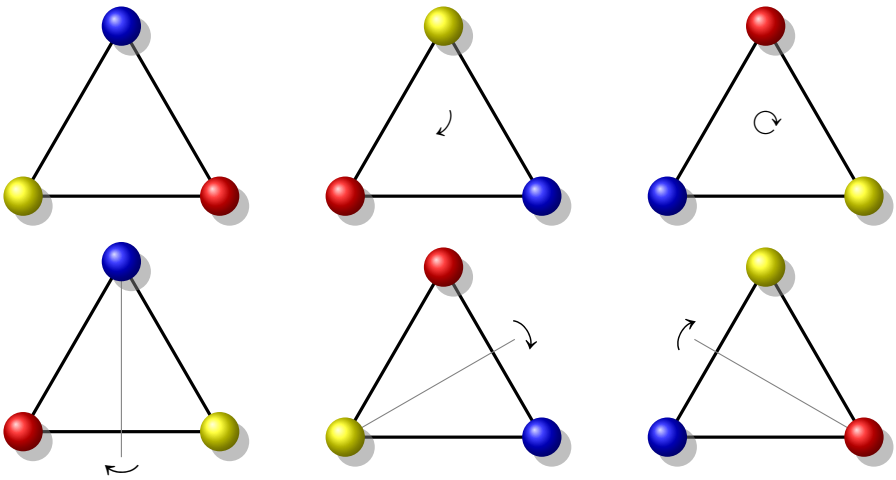
MAT 2250
Introduction à la théorie des groupes

Luc Bélair, François Bergeron et Christophe Hohlweg

20 novembre 2017



UQÀM **Université du Québec à Montréal**
Département de mathématiques
Case postale 8888, Succursale Centre-Ville
Montréal (Québec) H3C 3P8

Table des matières

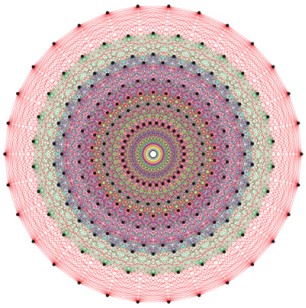
Table des figures

Avant-propos

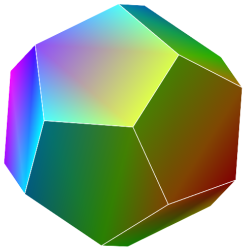
Ce recueil est en cours d'amélioration. Il est bien de consulter la page internet du cours pour les mises à jour. On remercie d'avance ceux qui prendront la peine de signaler les erreurs de toute nature. La version électronique est dynamique, avec des liens vers plusieurs ressources externes. En particulier, pour les quelques figures ou images provenant d'autres sources, un lien permet de retrouver cette source. Dans tous ces cas, les images sont du domaine public. Les notes contiennent aussi parfois des allusions à des sujets plus avancés, ou externes au cours. Lorsque cela est possible, il y a aussi des liens vers des pages qui expliquent (en partie) ces notions.

C.H. tient à remercier chaleureusement Stéphanie Schanck pour la relecture de ces notes qu'elle a effectuée lors de l'automne 2016, relecture qui a grandement contribué à la qualité du document final.

Introduction



La notion de groupe joue un rôle fondamental en mathématiques. C'est l'une des principales structures algébriques, avec celles d'anneau, de corps, modules, et espaces vectoriels. D'une part, elle formalise les propriétés de plusieurs des opérations bien connues entre des objets mathématiques divers comme les : nombres, vecteurs, matrices, fonctions, etc. D'autre part, elle donne un contexte clair pour discuter de transformations de toutes sortes : rotations, translations, symétries, etc. ; ou encore de manipulations d'objets. Elle est essentielle pour comprendre des aspects fondamentaux de la physique (théorie de la relativité, théorie des quantas), de la chimie (calcul des isomères), de la cristallographie (symétries des cristaux), de la cryptographie à clé publique (système RSA, courbes elliptiques), et de l'étude des codes correcteurs d'erreurs. Elle joue aussi un rôle fondamental en théorie de Galois [1] (qui étudie la résolution d'équations polynomiales), en théorie des nombres, en géométrie, et dans la théorie des invariants. Bref, c'est l'une des notions les plus intéressantes parmi celles élaborées par les mathématiciens.



Le dodécaèdre.

Souvent, un groupe décrit les transformations possibles d'un objet, ou les manipulations qu'on peut faire sur un objet. On suppose qu'appliquer à l'objet considéré une suite de transformations successives est aussi une transformation. On dira alors qu'on a « composé » les transformations pour en produire une nouvelle. On suppose aussi que défaire une transformation est une transformation. On dira que c'est à la transformation « inverse ». Le groupe est l'ensemble des transformations possible. Pour fixer les idées, on considère par exemple les diverses rotations du dodécaèdre (voir figure ci-contre), ou encore les symétries possibles d'un triangle équilatéral, comme l'illustre la figure 1. On constate qu'il y a 3 manières de faire effectuer une symétrie de rotation du triangle, et 3 symétries axiales (de réflexions).

1. Due à Évariste Galois, 1811-1832.

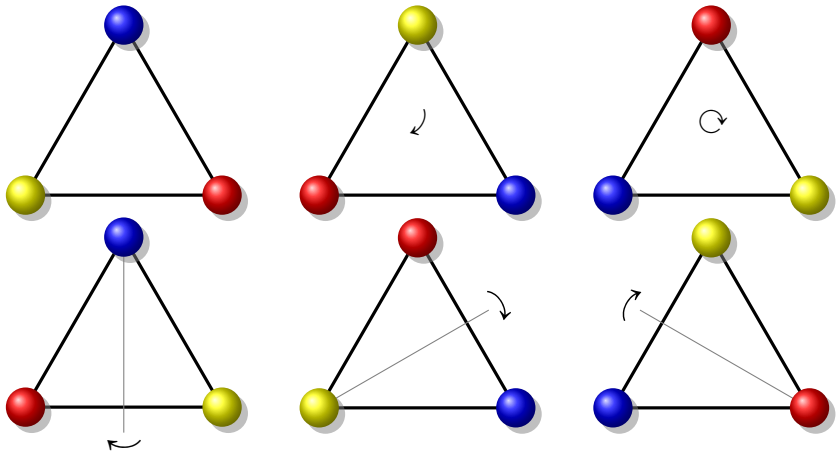


FIGURE 1 – Les symétries d'un triangle équilatéral.

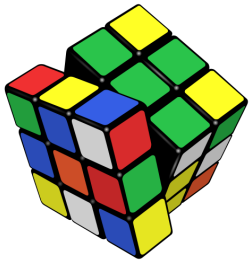


FIGURE 2 – Le Cube de Rubik.

Comme nous allons le voir dans ce cours, le fait d'en comprendre les transformations possibles permet de mieux saisir le rôle d'un objet, et d'en dégager les propriétés essentielles. Pour illustrer le sens de cette affirmation, considérons le fameux casse-tête qu'est le Cube de Rubik. Les mouvements possibles consistent à faire tourner une des 6 « faces » du cube de 90°, comme l'illustre la figure ci-contre. L'objectif est de ramener le cube à son état original (à savoir celui où les faces sont toutes d'une couleur uniforme), par une succession de tels mouvements. Dans ce contexte, on considère donc le « groupe » de toutes les suites possibles de rotation des faces. Comprendre ce groupe permet de comprendre comment résoudre le cube. Grâce à la théorie des groupes, on peut calculer [2] qu'il y a

$$(3^8 \times 2^{12} \times 12! \times 8!)/12 = 43252003274489856000$$

états (positions) possibles du cube, dont une seule est la bonne (la solution). Lorsqu'on manipule le cube, on s'aperçoit rapidement que le résoudre n'est pas facile. Par essai et erreur, on découvre (assez) vite comment rendre une des faces à son état de couleur uniforme ; puis, un peu moins rapidement, comment s'approcher de la solution. Malheureusement, quand on en est tout proche, on s'aperçoit qu'il faut revenir en arrière (et défaire en partie ce que l'on a fait) pour arriver à la solution. C'est alors loin d'être évident.

Heureusement, si on la connaît, la théorie des groupes permet d'organiser les étapes nécessaires. Donc, en un certain sens, le problème du Cube de Rubik est un problème de théorie des groupes appliquée.

2. La théorie aide à trouver la bonne formule.

La manipulation du Cube permet d'illustrer beaucoup des concepts de base de la théorie. Même à la maison, la théorie des groupes trouve application. Dans un article du New York Times, on décrit (sourire en coin) les diverses manières de retourner un matelas grâce à la théorie des groupes pour en éviter la déformation. On considère d'abord que les coins du matelas sont étiquetés comme l'illustre la figure ci-contre[3]. Il y a trois manipulations possibles du matelas, illustrées à la figure 3.

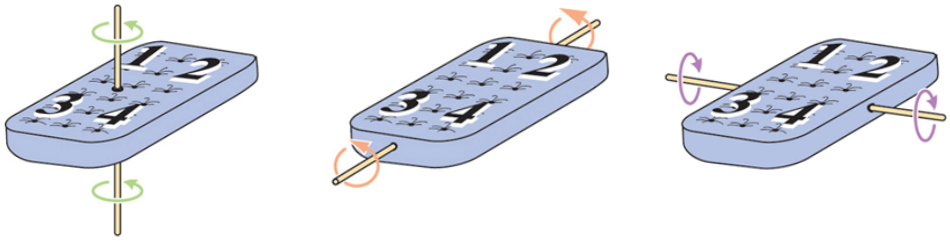
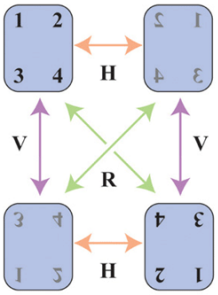


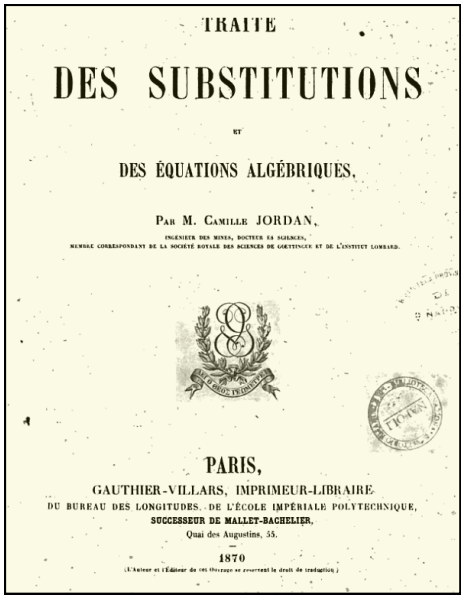
FIGURE 3 – Retournements de matelas.

Le matelas peut se retrouver dans l'un de quatre états, illustrés à la figure ci-contre, avec les diverses manipulations qui permettent de passer d'un état à l'autre. En un certain sens aussi, il y a une grande analogie avec la physique mathématique. Pour comprendre un objet physique (ou un phénomène), la clé consiste à comprendre le groupe des transformations de cet objet. Par exemple, dans la découverte du « buckminsterfullerène[4] », une molécule constituée de 60 atomes de carbone assemblés comme l'indique la figure , la théorie des groupes à permis de calculer le spectre de cette molécule avant même qu'on en ait trouvé des exemples dans la nature (autant sur Terre que dans l'espace). Cela détermine quelles sont les notions qu'on peut utiliser pour formuler les lois de la physique qui régissent le comportement de cet objet (ou phénomène). La théorie des groupes est donc cruciale pour dégager les théories de la physique. Ainsi, les lois de la relativité générale, les équations de Maxwell, et les équations de Dirac décrivant les propriétés des électrons sont « invariantes » pour les transformations du groupe de Lorentz[5]. Grâce à ce fait, on peut fortement circonscrire leur formulation. Voilà pourquoi plusieurs livres de la physique moderne amorcent leurs exposés avec la théorie des groupes.



États et transitions pour le matelas.

3. Les figures sont celles du New York Times
4. Ainsi appelé en l'honneur de Richard Buckminster Fuller (1895–1983), le concepteur de la biosphère.
5. Hendrik Lorentz, (1853-1928). Pour plus de détails, voir groupe de Lorentz.



TRAITÉ

DES SUBSTITUTIONS

ET

DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES,

PAR M. CAMILLE JORDAN,

INGÉNIEUR DES MINES, DOCTEUR ÈS SCIENCES,

MEMBRE CORRESPONDANT DE LA SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES DE GOETTINGUE ET DE L'INSTITUT LOMBARD.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1870

(L'Auteur et l'Éditeur de ces ouvrages se réservent le droit de traduction.)

La théorie des groupes est née de la convergence de plusieurs domaines : théorie des nombres, géométrie, résolution d'équations algébriques, etc. Elle s'est dégagée dans la seconde moitié du 19e siècle. C'est à Galois qu'on doit le terme « groupe », qu'il a utilisé un peu au sens de « regroupement » pour des transformations. On s'est ensuite aperçu qu'elle permettait d'unifier plusieurs notions considérées à l'époque, pour autant qu'on en isole les propriétés correctement. On trouve beaucoup des notions modernes sur les groupes dans le *Traité des substitutions et des équations algébriques* publié en 1870 par Jordan [6]. Abstraitement donc, un groupe est simplement un ensemble muni d'une opération avec de bonnes propriétés. Dans un premier temps, nous allons en donner une description précise, pour ensuite donner corps à la notion en présentant une famille d'exemples typiques. En ce sens, on procède donc à l'inverse de ce qui s'est produit historiquement.

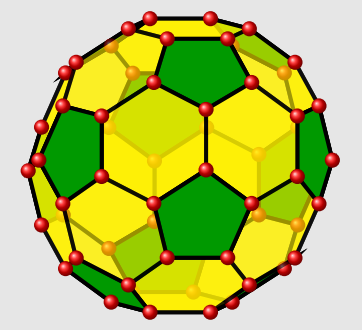


FIGURE 4 – Forme de la molécule C_{60}, la buckminsterfullerène, et la biosphère.

6. Camille Jordan, (1838-1922).

Chapitre 1

Groupes

Nous savons que nous pouvons multiplier et additionner des entiers, mais aussi que l'on peut additionner et multiplier des ensembles classes de congruence modulo un entier fixé. On peut se demander quel est le point commun entre ces opérations, et en particulier, quels résultats sont toujours valides lorsque nous considérons uniquement les propriétés générales de ces lois de calcul. En fait on va introduire ici de nouveaux objets mathématiques qui vont illustrer les propriétés générales de ces opérations, en se détachant du particulier.

1.1 Magma, monoïdes et groupes

Pour la suite, on suppose que E est un ensemble non vide.

Loi de composition, ou opération. On dit d'une fonction $* : E \times E \to E$ qu'elle est une **loi de composition interne sur** E, ou une **opération binaire** sur E. Le couple $(E, *)$ est alors appelé un **magma**. Si $(E, *)$ est un magma, on note $x * y$ l'image de (x, y) par la fonction $* : E \times E \longrightarrow E$.

Parmi les lois de composition, certaines possèdent des propriétés particulières qui les rendent plus intéressantes. Le choix de ces propriétés n'est pas arbitraire. En effet, c'est une vaste expérience mathématique qui a permis de dégager quelles sont les propriétés qui donnent à une loi de composition une structure suffisamment riche pour qu'elle ait un impact important sur l'étude d'un contexte dans lequel elle apparaît. Nous aurons maintes fois l'occasion de constater qu'une fois mises en évidence ces propriétés apparaissent toutes naturelles. On dit d'une loi de composition (opération) $*$, qu'elle est

(1) **associative** si $x * (y * z) = (x * y) * z$, pour tout $x, y, z \in E$.

(2) **commutative** si $x * y = y * x$ pour tout $x, y \in E$.

On remarque que, si $*$ est associative, alors on peut écrire $x * y * z$ au lieu de $(x * y) * z = (x * y) * z$, puisqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur la façon de faire le calcul. Bien entendu, toutes les lois ne sont pas associatives.

Exemples. (a) Les opérations usuelles d'addition « + » et de multiplication « · » d'entiers (dans $\mathbb{Z}$) sont toutes deux commutatives et associatives. Il en est de même pour les entiers modulo n, c.-à-d. dans $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Dans ce qui suit, on suppose que l'ensemble $\mathbb{Z}_n$ est identifié [1] à $\{0, 1, \ldots, n\}$.

(b) La loi de composition $\star : (x, y) \mapsto xy + 1$ sur $\mathbb{N}$ est commutative, mais pas associative. En effet, pour $x, y, z \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} (x \star y) \star z &= (xy + 1) \star z = (xy + 1)z + 1 = xyz + z + 1, \quad \text{et} \\ x \star (y \star z) &= x \star (yz + 1) = x(yz + 1) = xyz + x + 1. \end{aligned}$$

Les résultats sont donc sont manifestement différent si $x \neq z$.

(c) On vérifie facilement que l'opération $x \star y := x^y$, pour x et y dans $\mathbb{N}$, n'est ni associative ni commutative.

(d) Dans l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices $n \times n$ à coefficients réels, l'addition est une loi associative et commutative, tandis que la multiplication est une loi associative, mais pas commutative en général (voir Exercice 1.17).

(e) La paire $(\mathrm{Fonct}(E), \circ)$ composée de l'ensemble des fonctions sur E et de la composition des fonctions forme un magma et la loi « $*$ » est associative.

Lois de composition et sous-ensembles. Pour une opération $*$ sur E, et $A \subseteq E$, on dit que l'ensemble A est **stable** pour $*$, si pour tout $x, y \in A$ on a $x * y \in A$. On dit parfois que A **hérite** de l'opération [2] de E. Autrement dit, $*$ est aussi une opération sur A car la fonction

$$* : A \times A \longrightarrow A, \qquad \text{avec} \qquad (x, y) \longmapsto x * y$$

est bien définie. On peut donc considérer la structure algébrique $(A, *)$, qui est appelée un sous-magma. L'associativité est **héréditaire**, c.-à-d.que si $*$ est associative dans E, et A est stable pour $*$, alors $*$ restreint à A est aussi associative. En effet, l'égalité $x * (y * z) = (x * y) * z$ est vraie pour tout $x, y, z \in E$, donc en particulier pour tout $x, y, z \in A$ sous-ensemble de E. On constate de la même manière que la commutativité est **héréditaire**. Nous aurons plusieurs exemples de cette situation dans ce qui suit. Considéré comme sous-ensemble de $\mathbb{Z}$, l'ensemble $\mathbb{Z}^*$ (des entiers non nuls) est stable pour la multiplication, mais $\mathbb{Z}^*$ n'est pas stable pour l'addition, puisqu'on observe que $1 + (-1) = 0 \notin \mathbb{Z}^*$.

1. C'est un léger abus de langage qui sera rediscuté au Chapitre 4.
2. Rigoureusement parlant, on devrait dénoter $\star|_{A \times A}$ la restriction de $\star$ à A, mais il n'y a pas risque de confusion.

Élément neutre, et monoïdes. Tout comme c'est le cas de 1 pour la multiplication usuelle, ou de 0 pour l'addition, plusieurs opérations admettent des « éléments neutres ». Plus généralement, pour $*$ une opération sur E, on dit que le magma $(E, *)$ possède un **élément neutre** s'il existe un élément $e \in E$, tel que $x * e = e * x = x$ pour tout $x \in E$; .

Définition. Un **monoïde** est un couple $(E, *)$, où $*$ est une opération associative qui admet un élément neutre $e \in E$. Un monoïde est dit **commutatif**, si l'opération est de plus commutative.

Si $(E, *)$ possède un élément neutre e, alors cet élément neutre est **unique**. En effet, soit e et e' deux candidats, alors $e = e * e' = e' * e = e'$, et donc e et e' coïncident forcément. Il est clair que si $A \subseteq E$ est stable pour $*$ et $e \in A$, alors e est élément neutre pour $(A, *)$. Dès la petite école on apprend que les opérations de $(\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathbb{Q}, \cdot)$ sont commutatives. En algèbre linéaire on est confronté (souvent pour la première fois) à une opération non commutative : la multiplication de matrices.

Éléments inversibles, et groupes. Une autre façon de concevoir la division de nombres x/y dans $\mathbb{R}^*$ (resp. la soustraction $x - y$ dans $\mathbb{Z}$) et de penser qu'elle correspond à la multiplication de x par « l'inverse » multiplicatif $1/y$, de y (resp. l'addition de l'inverse additif $-y$). Cette approche est plus naturelle lorsqu'on cherche à généraliser, et on en arrive à la définition suivante.

Définition. On dit que $x \in E$ est **inversible** dans $(E, *)$ s'il existe $\tilde{x} \in E$ tel que $x * \tilde{x} = \tilde{x} * x = e$. Dans $(\mathbb{Z}, +)$, l'inverse de x est $-x$. Dans $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$, l'inverse de x est $1/x$.

Dans un premier cours d'algèbre linéaire, on montre qu'une matrice $n \times n$ réelle est inversible pour la multiplication de matrices, si et seulement si son déterminant est non nul. On désigne habituellement par $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles de déterminant non nul.

Nous sommes maintenant prêts à donner une définition précise de la notion de groupe.

Définition. On dit que $(E, *)$ est **un groupe** si $(E, *)$ est un monoïde, et si tous les éléments de E sont inversibles. Un groupe $(E, *)$ est dit **abélien**[3], ou **commutatif**, si de plus l'opération $*$ est commutative.

Par exemple, $(\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ sont des groupes abéliens, mais $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \cdot)$ ne l'est pas.

On note par $E^\times$ **l'ensemble des éléments inversibles** de E :

$$E^\times := \{x \in E \mid x \text{ est inversible}\}. \tag{1.1}$$

La proposition suivante fournit un outil général pour « construire » des groupes.

Proposition 1.1. *Soit $(E, *)$ un monoïde. Alors $(E^\times, *)$ est un groupe dont l'élément neutre est e. En particulier, E est un groupe si et seulement si $E = E^\times$. De plus, $\widetilde{x * y} = \tilde{y} * \tilde{x}$.*

3. Du mathématicien norvégien Niels H. Abel (1802-1829).

Démonstration. Il faut montrer que

(1) $*$ est une opération sur $E^\times$; en d'autres termes, que $E^\times$ est stable pour $*$;

(2) $(E, *)$ est un monoïde d'élément neutre e ;

(3) Tout élément de $E^\times$ est inversible.

Montrons d'abord (1). Il suffit de vérifier que si x, y sont inversibles dans E, alors $x * y$ l'est aussi dans E. On a

$$(\widetilde{x * y}) * (x * y) = \widetilde{y} * \widetilde{x} * x * y = e = x * y * \widetilde{y} * \widetilde{x} = (x * y) * (\widetilde{x * y})$$

Donc $x * y$ est inversible et son inverse est $\widetilde{y} * \widetilde{x}$. En particulier, comme $\widetilde{x * y}$ est aussi inversible dans $E^\times$ (d'inverse $x * y$), tout élément de $E^\times$ est inversible, ce qui montre (iii).

Montrons maintenant (2). On sait que $E^\times$ est stable pour $*$ donc par hérédité, $*$ est associative sur $E^\times$. Puisque $\widetilde{e} = e$ car $e * e = e$, alors $e \in E^\times$ et donc $(E^\times, *)$ est un monoïde. ■

Remarque. Il y a plusieurs définition équivalente de groupes dans la littérature. Par exemple, on constate aussi que $(G, *)$ est un groupe si et seulement si

(1) $*$ est associative ;

(2) il existe $e \in G$ tel que, pour tout $x \in G$, $e * x = x$; (**élément neutre à gauche**) ;

(3) pour tout $x \in G$ il existe $y \in G$ tel que $y * x = e$. (**élément inversible à gauche**).

L'implication directe est une conséquence immédiate des définitions. Supposons maintenant que $(G, *)$ vérifie les trois conditions susmentionnées. Comme on sait déjà que $*$ est associative, il suffit de vérifier que $(G, *)$ possède un élément neutre (à droite autant qu'à gauche), et que tout élément de G est inversible (aussi à droite autant qu'à gauche). Par hypothèse, chaque $x \in G$ admet un inverse à gauche $y \in G$. Reste à vérifier que $x * y = e$. Or, comme $y \in G$, il existe également $z \in G$ tel que $z * y = e$. On calcule alors que

$$x * y = e * (x * y) = (z * y) * (x * y) = z * (y * x) * y = z * e * y = z * y = e,$$

ce qui donne la propriété désirée. De façon très semblable, pour voir que e (l'élément neutre à gauche) est aussi élément neutre à droite, on calcule comme suit. Pour $x \in G$, on sait maintenant qu'il existe $y \in G$ tel que $y * x = x * y = e$, et on calcule que

$$x * e = x * (y * x) = (x * y) * x = e * x = x.$$

On observe que dans tout monoïde $(E, *)$, où l'élément neutre est noté e, l'inverse d'un élément, s'il existe, est **unique**. En effet, pour $x \in E$, si $y, y' \in E$ deux inverses potentiels, alors

$$y = y * e = y * (x * y') = (y * x) * y' = e * y' = y'.$$

Il sont donc forcément égaux. On peut donc parler de **l'inverse**[4] de x, et on le note $\widetilde{x}$. On vérifie facilement (voir Exercice 1.3) que

$$\widetilde{\widetilde{x}} = x, \qquad \text{et} \qquad \widetilde{e} = e. \tag{1.2}$$

4. La subtilité réside dans l'utilisation du « l »-apostrophe, qui souligne l'unicité.

Notation additive et multiplicative des groupes. Les **conventions** suivantes sont d'une utilisation généralisée, et pratique si on en comprend bien le sens. Cependant, elles mènent parfois à la confusion si on en ignore la portée. Lorsque le contexte est clair, on dit souvent que G est un « groupe » (sans mentionner l'opération), au lieu de $(G, \cdot)$. Sauf mention contraire, on note habituellement les opérations de groupes **multiplicativement** : $(x, y) \mapsto xy$, et on dit que ce sont des **produits**[5]. De plus, on écrit $x^{-1} = \widetilde{x}$ pour l'inverse de $x \in G$, et l'élément neutre est noté 1, ou 1_G. Dans le cas spécial où le groupe $(G, *)$ est un groupe abélien, on note plutôt l'opération additivement : $(x, y) \mapsto x + y$, et on dit que ce sont des **sommes**. On écrit alors $-x = \widetilde{x}$ pour l'inverse de $x \in G$, appelé aussi **opposé** de x, et l'élément neutre est noté 0, ou 0_G.

1.2 Exemples classiques

Les exemples classiques suivants (certains déjà mentionnés) apparaissent naturellement dans divers contextes des mathématiques. Leur variété souligne l'importance de la notion de groupe. Évidemment, les premiers exemples sont les plus simples.

L'addition de nombres. L'addition de nombres complexes $(a, b) \mapsto a + b$ est une loi de composition sur $\mathbb{C}$, et $(\mathbb{C}, +)$ est un groupe abélien d'élément neutre 0. De même

(a) $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{Z}^-, +)$, $(\mathbb{Q}^+, +)$, $(\mathbb{R}^-, +)$ et $(\mathbb{R}^+, +)$ sont des monoïdes commutatifs. En effet, ces sous-ensembles sont stables pour $+$, et ils héritent donc de l'associativité et de la commutativité. Cependant tous leurs éléments ne sont pas inversibles. Observons que l'opposé de 2 n'existe pas dans $(\mathbb{N}, +)$, ni $(\mathbb{Q}^+, +)$, ni dans $(\mathbb{R}^+, +)$;

(b) $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ sont des groupes : il est clair que ce sont des monoïdes, où tous les éléments ont des opposés ;

(c) Les ensembles $\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$, et $\mathbb{C}^*$ (dans chaque cas privé de 0) ne sont pas stables pour $+$, puisque (par exemple) $1 + (-1) = 0$ n'appartient à aucun de ces ensembles ;

(d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a que $(n\mathbb{Z}, +)$ est un groupe. En effet, on peut restreindre l'addition à $n\mathbb{Z}$ puisque $n\mathbb{Z}$ est stable pour l'addition. De plus, $0 \in n\mathbb{Z}$, et donc $(n\mathbb{Z}, +)$ est un monoïde. Enfin, $nk \in n\mathbb{Z}$ est inversible dans $n\mathbb{Z}$, car son opposé est $n(-k) \in n\mathbb{Z}$.

La multiplication de nombres. *La multiplication de nombres complexes* $(a, b) \mapsto ab$ est une loi de composition sur $\mathbb{C}$, et $(\mathbb{C}, \cdot)$ est un monoïde commutatif. Par ailleurs, puisque $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C}^*$, on a le groupe abélien $(\mathbb{C}^*, \cdot)$, d'élément neutre 1. De plus,

5. Bien que la plupart du temps ce ne sont pas des produits usuels.

(a) $(\mathbb{N}^*, \cdot)$ et $(\mathbb{Z}^*, \cdot)$ sont des monoïdes commutatifs, puisque les sous-ensembles correspondants sont stables pour $\cdot$. Ils héritent donc de l'associativité et de la commutativité. Cependant, tous leurs éléments ne sont pas inversibles. Par exemple, l'inverse de 2 n'existe pas, ni dans $\mathbb{N}$, ni dans $\mathbb{Z}$.

(b) $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ et $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ sont des groupes. Puisque ce sont des sous-ensembles stables de $\mathbb{C}^*$, il est clair que ce sont des monoïdes. De plus, tous les éléments sont inversibles.

(c) $\mathbb{Z}^-$ n'est pas stable pour « $\cdot$ ». En effet, le produit de deux nombres négatifs est positif.

(d) pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a que $(n\mathbb{Z}, \cdot)$ est un monoïde si et seulement si $n = 1$. En effet, on peut vérifier directement que $n\mathbb{Z}$ est stable pour la multiplication. Cependant, $1 \in n\mathbb{Z}$ si et seulement si $n = 1$.

Algèbre linéaire. Tout espace vectoriel est un groupe abélien pour l'addition de vecteurs (voir Exercice 1.6). De plus, pour $n \in \mathbb{N}$ on constate que

(a) $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$ est un groupe abélien ;

(b) $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \cdot)$ est un monoïde (non commutatif) dont l'élément neutre est la matrice identité I_n.

(c) Dans $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \cdot)$, l'ensemble des inversibles est

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^\times = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,|\, \det(M) \neq 0\}.$$

En vertu de la proposition 1.1, $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \cdot)$ est un groupe. On l'appelle le **groupe linéaire**. Il est non abélien si $n > 1$. De plus, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (attention, ici l'ordre de multiplication est important, car l'opération n'est pas commutative).

Ensembles quotients $\mathbb{Z}_n$. Les entiers modulo n joue un rôle important dans plusieurs contextes. Ils sont introduits dans les tout premiers cours universitaires. On montre que

(a) $(\mathbb{Z}_n, +)$ est un groupe abélien.

(b) $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$ est un monoïde commutatif, mais pas un groupe.

(c) $((\mathbb{Z}_n)^\times, \cdot)$ est un groupe abélien.

On invite le lecteur à vérifier ces affirmations en exercice (voir Exer 1.5).

Fonctions et bijections. On désigne par $\mathrm{Fonct}(E, E)$ **l'ensemble des fonctions** de E vers E. Observons que cet ensemble est toujours non vide, même si E est vide[6]. Comme d'habitude la **composition** de fonction est dénotée $(f, g) \mapsto f \circ g$, avec $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. On désigne par S_E l'ensemble des bijections de E vers E. Puisque, par définition, les **bijections** sont les fonctions qui admettent un inverse pour la composition de fonctions, c'est donc dire dire que

$$S_E = (\mathrm{Fonct}(E, E))^\times. \tag{1.3}$$

6. Il y a une et une seule fonction de $\varnothing$ vers $\varnothing$, et c'est une bijection.

On dit aussi de σ dans S_E que c'est une **permutation** de E. Puisque la composition est une opération associative sur $\mathrm{Fonct}(E,E)$ (voir Exercice 1.10), il s'ensuit que $(\mathrm{Fonct}(E,E),\circ)$ est un monoïde (non commutatif en général). La fonction **identité** Id_E, telle que $\mathrm{Id}_E(x) := x$, est l'élément neutre dans $(\mathrm{Fonct}(E,E),\circ)$. C'est donc que $(\mathrm{Fonct}(E,E),\circ)$ est un monoïde. L'égalité (1.3) implique que $(S_E,\circ)$ est un groupe. On dit que c'est le **groupe symétrique**, ou **groupe des permutations**, de l'ensemble E. Lorsque $E = \{1\ldots,n\}$ on écrit traditionnellement S_n plutôt que S_E. Les éléments de S_n sont souvent représentés par des matrices $2\times n$. Ainsi, pour $\sigma\in S_n$, on note

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

On écrit aussi souvent $\sigma = \sigma(1)\sigma(2)\ldots\sigma(n)$. Nous allons voir que les groupes symétriques jouent un rôle fondamental en mathématiques. Dans S_n, on omet souvent le symbole de composition de fonctions, et on note multiplicativement la loi de composition. On écrit alors $\sigma\tau$, plutôt que $\sigma\circ\tau$, et l'identité est notée e (pour ne pas confondre avec le nombre 1, qui joue ici un autre rôle). Par exemple, les éléments de S_3 sont (dans les deux notations)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 123,\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 213,\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 132,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 321,\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 231,\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 312.$$

Applications linéaires. Soit E un espace vectoriel, alors l'ensemble des applications linéaires bijectives sur E, noté $\mathrm{GL}(E)$, est un sous-ensemble de S_E. Comme la composée d'applications linéaires est linéaire, on en déduit que $(\mathrm{GL}(E),\circ)$ est un groupe. C'est le **groupe général linéaire** sur E. On verra plus tard, via la notion **d'isomorphisme de groupes**, que c'est (presque) le « même » groupe que $\mathrm{GL}_n = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, quand E est un espace vectoriel réel de dimension n. Un autre groupe typique est le groupe **spécial linéaire** $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^n$, ayant déterminant 1. Ce sont des exemples de Groupes de Lie[7].

Le groupe affine. Un groupe plus général (ici décrit pour $\mathbb{R}^n$) que celui de la dernière section est le groupe $GA_n(\mathbb{R})$. Décrit en terme de matrices, c'est l'ensemble des transformations f de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}_n$, de la forme

$$X \mapsto f(X) := A\,X + B,$$

où A est une matrice $n\times n$ de déterminant non nul, et B est un vecteur (colonne) dans $\mathbb{R}^n$. Ici, X est aussi considéré comme vecteur colonne. L'inverse de f est $f^{-1}(X) := A^{-1}\,X - A^{-1}\,B$. Le groupe affine transforme des droites dans des droites, des plans dans des plans, etc. Il préserve le parallélisme, les

7. Sophus Lie (1842–1899).

points milieu de segments, ou même le proportions sur une droite, etc. La géométrie affine correspond à étudier les théorèmes qui restent « invariants » [8] par transformations affines. Ainsi, parce que les concepts intervenants dans son énoncé sont préservés par les transformations affines, on peut ramener la preuve du fait que les trois médianes d'un triangle se coupent en un et un seul point, au cas du triangle équilatéral. En effet, il existe une (et une seule) transformation affine de $\mathbb{R}^2$ qui transforme n'importe quel triangle en un triangle équilatéral, et cette transformation envoie forcément l'intersection des trois médianes d'un des triangles dans l'autre. La géométrie projective correspond à faire une même démarche analogue avec le groupe « projectif », de même pour d'autres géométries. C'est l'idée du Programme d'Erlangen de Felix Klein.

1.3 Règles de calculs

Table de multiplication. On peut représenter un monoïde, ou un groupe, par sa **table de multiplication**. C'est une matrice (qui peut être infinie) telle que chaque ligne et chaque colonne est indexée par un élément ; à l'intersection de la ligne x et de la colonne y, on met le produit de x par y. Par exemple, la table de multiplication de S_3 est

	e	132	213	231	312	321
e	e	132	213	231	312	321
132	132	e	312	321	213	231
213	213	231	e	132	321	312
231	231	213	321	312	e	132
312	312	321	132	e	231	213
321	321	312	231	213	132	e

On remarque que S_3 n'est pas abélien, car $231 \circ 132 = 213 \neq 321 = 132 \circ 231$. On peut clairement voir dans la table de multiplication les inverses de chaque élément. En effet, l'inverse de l'élément x est y si l'intersection de la ligne x avec la colonne y est e. Une façon de décrire un (petit) groupe fini consiste parfois à en donner la liste de ces éléments, puis à donner explicitement sa table de multiplication (en s'assurant qu'elle respecte l'associativité). Ainsi, on a le groupe dont les éléments sont

$$G = \{1, a, b, ab, ba, aba\},$$

avec la multiplication donnée par la table de la figure 1.1.

L'inverse d'un produit. On a déjà vu plus haut que si x, y sont dans un groupe G alors $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$. Plus généralement,

$$(x_1 x_2 \dots x_n)^{-1} = x_n^1 \dots x_2^{-1} x_1^{-1}.$$

8. Il y a une notion mathématique précise, que nous ne présentons pas ici.

	1	a	b	ab	ba	aba
1	1	a	b	ab	ba	aba
a	a	1	ab	b	aba	ba
b	b	ba	aba	a	ab	1
ab	ab	aba	ba	1	b	a
ba	ba	b	a	aba	1	ab
aba	aba	ab	1	ba	a	b

FIGURE 1.1 – La table de multiplication du groupe G.

Comme le groupe n'est pas forcément abélien, on a en général

$$(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} \neq x^{-1}y^{-1} = (yx)^{-1},$$

sinon $xy = yx$ car $(x^{-1})^{-1} = x$. Par exemple, dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, on a les matrices

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

pour lesquelles on a

$$xy = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq yx = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bien entendu, si G est un groupe abélien, noté additivement, alors l'opposé de $x+y$ est $-x-y = -y-x$.

Puissances d'éléments. Soit $x \in G$ et $n, m \in \mathbb{N}$ alors l'associativité de l'opération du groupe G permet de définir le produit x^n comme suit

$$x^n := \begin{cases} x^{n-1}x & \text{si } n > 0, \\ e & \text{si } n = 0, \end{cases}$$

où 1 désigne l'élément neutre du groupe. En notation additive, on a plutôt

$$n \cdot x := \begin{cases} (n-1) \cdot x + x & \text{si } n > 0, \\ 0 & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

De plus, on montre facilement (par récurrence) que

$$x^n x^m = x^{n+m}, \qquad \text{(ou encore} \quad n \cdot x + m \cdot x = (n+m) \cdot x \quad \text{en notation additive).} \tag{1.4}$$

Attention, si le groupe G n'est pas commutatif, $(xy)^n \neq x^n y^n$. On peut seulement affirmer que

$$(xy)^n = \underbrace{xy\,xy\cdots xy}_{2n \text{ termes}}.$$

Il est pratique de considérer aussi les puissances négatives, en posant pour $n > 0$, que

$$x^{-n} := (x^n)^{-1} = (x^{-1})^n.$$

En notation additive, on a $-(n \cdot x) = (-n) \cdot x$. On vérifie alors que, pour tout $m, n \in \mathbb{Z}$, on a encore la règle des exposants (1.4) (de même pour la version additive).

1.4 Sous-groupes

On a vu jusqu'ici la définition de groupes, des premiers exemples ainsi que des règles de calculs classiques. Voyons maintenant la notion de sous-groupes qui nous sera très utile afin de construire des exemples plus nombreux de groups.

Soit $(G, \cdot)$ un groupe d'élément neutre e. On a vu précédemment que pour montrer que $(A, \cdot)$ est un groupe, pour A un sous-ensemble de G, il suffisait de montrer que A est stable pour l'opération, contient le neutre e de G, et que les inverses des éléments de A sont aussi dans A. Ceci suggère la définition suivante.

Définition. Un ensemble $H \subseteq G$ est un **sous-groupe** de G si il vérifie les conditions suivantes : (i) H est non vide ; (ii) H est un sous-ensemble stable de $(G, \cdot)$; (iii) $x^{-1} \in H$ pour tout $x \in H$.

Si H est un sous-groupe de G, on écrit $H \leqslant G$. Un sous-groupe différent de G et de $\{e\}$ est dit sous-groupe **propre**.

Remarque. On voit facilement que $H = \{e\}$ et G sont des sous-groupes de G. Pour montrer que H est non vide, il suffit souvent de montrer qu'il contient l'élément neutre e de G

Pour montrer que $(E, *)$ est un groupe, il est souvent plus facile de montrer que c'est un sous-groupe d'un groupe déjà connu.

Proposition 1.2. *Soit $H \leqslant G$, alors $(H, \cdot)$ est un groupe d'élément neutre e.*

Démonstration. L'ensemble H est non vide en vertue de la condition (i). Maintenant, en vertu de (ii) et (iii), si $x \in H$ alors $x^{-1} \in H$ et $e = xx^{-1} \in H$. Donc $(H, \cdot)$ est un monoïde d'élément neutre e. Comme tous les éléments de H sont inversibles, $H^\times = H$ et on conclut grâce à la Proposition 1.1. ∎

Exemple. (a) On a les (chaînes de) sous-groupes suivants :

$$(n\mathbb{Z},+) \leqslant (\mathbb{Z},+) \leqslant (\mathbb{Q},+) \leqslant (\mathbb{R},+) \leqslant (\mathbb{C},+);$$
$$(\mathbb{Q}^*,\cdot) \leqslant (\mathbb{R}^*,\cdot) \leqslant (\mathbb{C},\cdot).$$

De plus, pour tout espace vectoriel, $\mathrm{GL}(E) \leqslant S_E$.

(b) Pour un groupe G, l'ensemble

$$Z(G) = \{x \in G \,|\, gx = xg \text{ pour tout } g \in G\}$$

est un sous-groupe de G appelé le **centre du groupe** G. C'est en fait un groupe abélien. En effet, $eg = ge = g$ pour tout $g \in G$ donc $e \in Z(G)$ (et donc $Z(G)$ est non vide). Soit $x, y \in Z(G)$ et $g \in G$, alors $(xy)g = x(yg) = x(gy) = (xg)y = g(xy)$ donc $xy \in Z(G)$ et $Z(G)$ est stable pour la loi induite par G. Finalement, si $x \in Z(G)$ et $g \in G$, alors

$$gx = xg \quad \Longrightarrow \quad x^{-1}(gx)x^{-1} = x^{-1}(xg)x^{-1} \quad \Longrightarrow \quad x^{-1}g = gx^{-1}.$$

Donc $x^{-1} \in Z(G)$. Donc $Z(G) \leqslant G$. De plus, si $x, g \in Z(G)$ alors $xg = gx$ par définition, donc $Z(G)$ est abélien. On observe que G est abélien si et seulement si $Z(G) = G$.

Proposition 1.3. *Les seuls sous-groupes de $(\mathbb{Z},+)$ sont de la forme $n\mathbb{Z}$, pour $n \in \mathbb{N}$.*

Démonstration. Voir exercice 1.11. ∎

Proposition 1.4. *Soit G un groupe.*

(1) *Soit $H \subseteq G$, alors H est un sous-groupe de G si et seulement si $e \in H$ et pour tout $x, y \in H$ on a $xy^{-1} \in H$.*

(2) *Si $H \leqslant G$ et $K \leqslant H$ alors $K \leqslant G$ (la relation $\leqslant$ est transitive).*

(3) *L'intersection non vide d'une famille de sous-groupes de G est un sous-groupe de G.*

Démonstration. Voir exercice 1.12. ∎

Sous-groupes engendrés. Les espaces vectoriels peuvent être décrit de façon « minmale » en donnant une base de l'espace vectoriel et en disant que l'espace vectoriel est engendré par sa base. Nous allons présenté une notion analogue pour les groupes. Par exemple, si on considère le groupe $\mathbb{Z}$, avec l'addition, tout élément s'écrit sous la forme

$$x = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n\text{-fois}}.$$

Autrement dit $\mathbb{Z}$ est **engendré** par 1. C'est le plus petit sous-groupe de $\mathbb{Z}$ qui contient 1, en vertu de la proposition 1.3.

Définition. Plus généralement, pour G un groupe et $S \subseteq G$, on note $\langle S \rangle$ l'intersection de tous les sous-groupes de G qui contiennent S. C'est un sous-groupe de G (proposition 1.4) appelé **sous-groupe engendré** par S. Si $G = \langle S \rangle$, alors on dit que G est engendré par S, et que S est une **partie génératrice de** G. On dit des éléments de S que ce sont des **générateurs** de G. Lorsque $S = \{s\}$, alors on dénote plus simplement [9] par $\langle s \rangle$ le sous-groupe engendré par $s \in G$. Si $G = \langle s \rangle$ on dit que G est **monogène**.

La proposition suivante produit une définition alternative et constructive d'un sous-groupe engendré.

Proposition 1.5. *Soit G un groupe et $S \subseteq G$.*

(1) *Dans $\mathcal{P}(G)$ ordonné par l'inclusion, $\langle S \rangle$ est le plus petit sous-groupe de G contenant S.*

(2) *Pour $S = \varnothing$ alors $\langle S \rangle = \{e\}$. Sinon,*

$$\langle S \rangle = \{x_1 \dots x_n \,|\, n \in \mathbb{N},\ x_i \in S \text{ ou } x_i^{-1} \in S,\ \text{pour tout } 1 \leqslant i \leqslant n\, n \in \mathbb{N}\}.$$

Les éléments de $\langle S \rangle$ sont les produits [10] constitués de générateurs ou de leurs inverses. En notation additive, on a

$$\langle S \rangle = \{x_1 + \dots + x_n \,|\, n \in \mathbb{N},\ x_i \in S \text{ ou } -x_i \in S,\ \text{pour tout } 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

(3) *Si $A \subseteq G$ tel que $A \subseteq \langle S \rangle$, alors $\langle A \rangle \subseteq \langle S \rangle$. En particulier si $G = \langle A \rangle$, alors $G = \langle S \rangle$.*

Démonstration.

(1) Il faut montrer que $\langle S \rangle$ est le plus petit élément dans l'ensemble $\Lambda = \{H \in \mathcal{P}(G) \,|\, H \leqslant G,\ S \subseteq H\}$. Par définition

$$\langle S \rangle = \bigcap_{H \in \Lambda} H.$$

Si $K \in \Lambda$, alors K apparaît dans l'intersection de tous les sous-groupes de G qui contiennent S. En d'autres termes, $\langle S \rangle \subseteq H$. Donc $\langle S \rangle \in \Lambda$ est bien le plus petit élément de l'ensemble Λ de tous les sous-groupes de G qui contiennent S.

(2) Soit $S \neq \varnothing$. Posons $H = \{x_1 \dots x_n \,|\, n \in \mathbb{N}^*\ x_i \in S \text{ ou } x_i^{-1} \in S \text{ pour tout } 1 \leqslant i \leqslant n\}$. On remarque que $S \subseteq H$ et si $s \in S$ alors $e = ss^{-1} \in H$. Soit $y = y_1 \dots y_n$ et $z = z_1 \dots z_m$ des éléments de H, où $y_i, z_j \in S$ ou $z_i^{-1}, z_j^{-1} \in S$. Alors $yz^{-1} = y_1 \dots y_n\, z_m^{-1} \dots z_1^{-1}$.

Puisque $y_i z_j \in S$ ou $z_i^{-1}, z_j^{-1} \in S$, yz^{-1} est bien le produit d'élément de S ou de leurs inverses. Ainsi $yz^{-1} \in H$. On en déduit en vertu de la proposition 1.4 que $H \leqslant G$, d'où $H \in \Lambda$. En vertu de (1) on sait donc que $\langle S \rangle \subseteq H$. Montrons maintenant l'inclusion inverse. Soit $K \in \Lambda$

9. Au lieu d'écrire $\langle \{s\} \rangle$.

10. Rappelons qu'un produit vide ($n = 0$) est égal à 1, et qu'une somme vide est égale à 0. On dit aussi souvent d'un tel produit que c'est un **mot sur l'alphabet S représentant l'élément** du groupe.

et $x = x_1 \dots x_n \in H$ avec $x_i \in S \subseteq K$ ou $x_i^{-1} \in S \subseteq K$. Donc, puisque K est un groupe, $x_i = (x_i^{-1})^{-1} \in K$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$. D'où $x = x_1 \dots x_n \subseteq K$. On en conclut que $H \subseteq K$. Donc H est le plus petit élément de Λ pour l'inclusion. Autrement dit, $H = \langle S \rangle$ par (1).

(3) On laisse le soin au lecteur de vérifier ce dernier point en appliquant (1). ■

Exemples.

(a) $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$ est un groupe monogène pour l'addition. En effet, si $n \in \mathbb{Z}$ est positif, alors $n = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ fois}}$; et si $n \in \mathbb{Z}$ est négatif, on a $n = \underbrace{(-1) + (-1) + \cdots + (-1)}_{|n| \text{ fois}}$.

(b) $n\mathbb{Z} = \langle n \rangle$ est aussi un groupe monogène pour l'addition.

(c) $\mathbb{Z}_n = \langle 1 \rangle$ est encore un groupe monogène (pour l'addition).

(d) Posons $\tau_1 := 213$ et $\tau_2 := 132$. Alors $S_3 = \langle \tau_1, \tau_2 \rangle$, car $321 = \tau_1\tau_2\tau_1 = \tau_2\tau_1\tau_2$; $312 = \tau_2\tau_1$ et $231 = \tau_1\tau_2$. D'où $S_3 = \{e, \tau_1, \tau_2, \tau_1\tau_2, \tau_2\tau_1, \tau_1\tau_2\tau_1\}$.

(e) Posant $\sigma := 231$, on vérifie que $S_3 = \langle \tau_1, \sigma \rangle$. En effet, $\tau_2 = \tau_1\sigma$, $321 = \sigma\tau_1$ et $\sigma = \sigma^2 = \sigma^{-1}$.

Graphe de Cayley. Ces exemples permettent d'observer que l'expression d'un élément comme produit de générateurs n'est pas unique. Ainsi on a, $321 = \tau_1\tau_2\tau_1 = \tau_2\tau_1\tau_2$ dans S_3 ; et $1 = 1 + 1 + 1 + 1$ dans $\mathbb{Z}_3$ (noté additivement). On dit de telles expressions que ce sont des **relations dans le groupe**. D'autre part, les deux derniers exemples montrent que la partie génératrice d'un groupe n'est pas nécessairement unique (ici on donne deux façons de décrire S_3). Une façon de visualiser comment un couple (G, S), où G est un groupe engendré par S, est de construire le **graphe de Cayley** pour (G, S). Les sommets du graphe sont les éléments du groupe. Pour chaque générateur s, on a un arc de g à h :

$$g \xrightarrow{s} h, \qquad \text{ssi} \qquad s\,g = h.$$

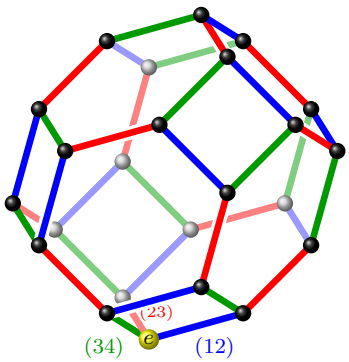


FIGURE 1.2 – Permutoèdre du groupe S_4.

On donne souvent des couleurs différentes aux arcs, selon les générateurs auxquels ils correspondent. Une autre habitude courante est de remplacer les arcs aller-retour qui correspondent à des involutions par une seule arête non orientée. Par exemple, on appelle le graphe de Cayley du groupe S_4, pour les générateurs $\tau_i = (i, i+1)$, le **permutoèdre de S_4**. Les arêtes bleues, rouges et vertes correspondent respectivement à la multiplication par les transpositions (12), (23) et (34). Les hexagones viennent de ce que

$$(12)(23)(12)(23)(12)(23) = e, \qquad \text{et} \qquad (23)(34)(23)(34)(23)(34) = e,$$

et les carrés de $(12)(34)(12)(34) = e$. Bien entendu, un même groupe donne lieu à plusieurs graphes de Cayley différents, selon que l'on considère des systèmes de générateurs différents. Ainsi, le graphe

de Cayley pour S_3, avec les générateurs $\tau_1 = (12)$ et $\tau_2 = (23)$ donne le graphe de gauche dans la figure 1.3 ; tandis qu'avec les générateurs $\tau_1 = (12)$ et $\sigma = (123)$, on obtient le graphe de droite de cette même figure.

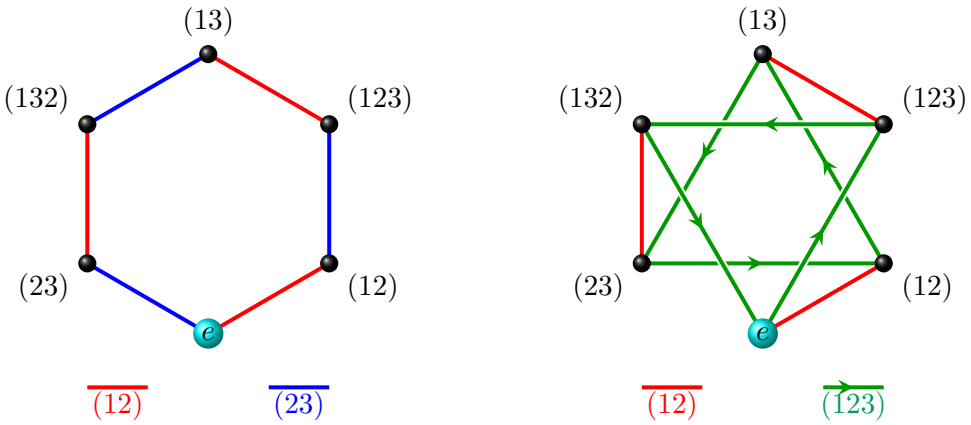


FIGURE 1.3 – Deux graphes de Cayley pour S_3.

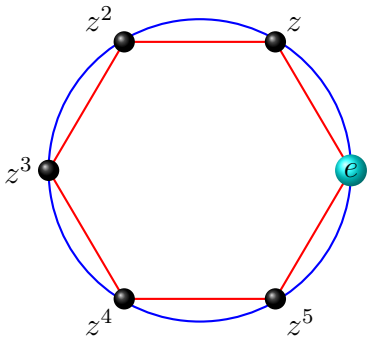
Proposition 1.6. *Tout groupe monogène est abélien. De plus, si G est un groupe et $x \in G$, alors la fonction $f : \mathbb{Z} \to \langle x \rangle$ définie en posant $f(k) := x^k$ est surjective, et vérifie : $f(k+\ell) = f(k)f(\ell)$ pour tout $k, l \in \mathbb{Z}$; et l'ensemble $\{k \in \mathbb{Z} |\ f(k) = e\}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$, donc est de la forme $n\mathbb{Z}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$.*

Démonstration. Voir exercice 1.16. ■

1.5 Ordre d'un groupe, ordre d'un élément

Nous allons maintenant nous intéresser à l'étude du cardinal d'un groupe et de ses sous-groupes.

Définition. On dit que G est un **groupe fini**, si G est fini en tant qu'ensemble. On dit alors du cardinal $|G|$ que c'est l'**ordre** de G. L'**ordre d'un élément** $x \in G$ est l'ordre du groupe (monogène) $\langle x \rangle$. On le note $\mathrm{ord}_G(x)$, ou simplement $\mathrm{ord}(x)$ si il n'y a pas de confusion possible.
Si le groupe $\langle x \rangle$ est infini, on dit que l'ordre de x est infini, et on écrit $\mathrm{ord}(x) := \infty$. S'il est fini, on pose $\mathrm{ord}(x) := |\langle x \rangle|$. Le groupe monogène fini $\langle x \rangle$ est alors appelé **groupe cyclique**.



Groupe cyclique, $z^6 = e$.

Exemple. Par exemple, l'ordre de S_3 est $|S_3| = 6$ et celui de $\mathbb{Z}_n$ est $|\mathbb{Z}_n| = n$. Observons que dans $(\mathbb{Z}, +)$, tous les éléments non nuls sont d'ordre infini et $\mathrm{ord}(0) = 1$! En effet si $n \neq 0$, alors $n\mathbb{Z} = \langle n \rangle$ est en bijection avec $\mathbb{Z}$ et est donc, de ce fait, infini.

Remarque. (i) Pour un groupe G fini, il est clair que $\mathrm{ord}(x) \leqslant |G|$, pour chaque élément x de G, puisque $\langle x \rangle \subseteq G$.

(ii) L'élément neutre e est le seul élément de G d'ordre 1. En effet, on a d'abord clairement $|\langle e \rangle| = |\{e\}| = 1$. Réciproquement, si $\mathrm{ord}(x) = 1 = |\langle x \rangle|$, alors $\langle x \rangle = \{x\}$. Comme tout sous-groupe de G contient e, on a $e \in \langle x \rangle$, et donc $x = e$.

(iii) Évidemment, G est infini s'il contient un élément d'ordre infini x, puisqu'il contient l'ensemble infini $\langle x \rangle$.

(iv) On a en général (exercice) $\mathrm{ord}(x) = \mathrm{ord}(x^{-1})$. On dit des éléments d'ordre 2 dans G, que ce sont des **involutions**. Les involutions sont donc telles que $x^{-1} = x$.

(v) Parmi les groupes finis dits exceptionnels (voir Section 2.3), le plus grand est le groupe M, qu'on appelle le « Monstre ». Une des raisons est que son ordre est « assez » grand

$$\begin{aligned} &2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 49 \cdot 71 \\ &\qquad = \ 808017424794512875886459904961710757005754368000000000. \end{aligned}$$

Le résultat suivant est une caractérisation importante de l'ordre d'un élément et très utile à son calcul dans le cas fini.

Proposition 1.7. *Dans un groupe G, l'ordre d'un élément x est la plus petite puissance de x qui donne l'élément neutre, c.-à-d.*

$$\mathrm{ord}(x) = \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid x^n = e\}. \tag{1.5}$$

Le groupe cyclique $\langle x \rangle$ s'écrit alors :

$$\langle x \rangle = \{e, x, x^2, \ldots, x^{n-1}\}.$$

Démonstration. On sait que $\langle x \rangle = \{x^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Comme x est d'ordre fini, l'ensemble $\{x^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ l'est aussi. Donc il existe p, q tel que $p > q$ et $x^p = x^q$. En effet, sinon $x^p = x^q$ impliquerait que $p = q$ et donc que la fonction

$$\mathbb{Z} \to \langle x \rangle, \qquad \text{avec} \qquad k \mapsto x^k,$$

de la Proposition 1.6 serait injective, et donc bijective. D'où $\langle x \rangle$ serait infini, ce qui contredirait notre hypothèse.

Puisque $x^p = x^q$, on constate donc que $x^{p-q} = e$ et $p - q > 0$. L'ensemble $\{k \in \mathbb{N}^* \mid x^k = e\} \subseteq \mathbb{N}$ est donc non vide, il admet donc un plus petit élément n. Il s'ensuit que $x^n = e$. Il reste maintenant à démontrer que

$$\langle x \rangle = \{e, x, x^2, \ldots, x^{n-1}\}$$

et donc que $\mathrm{ord}(x) = |\langle x\rangle| = n$. Pour cela, il suffit de montrer l'inclusion de gauche à droite. Soit $y \in \langle x\rangle$, alors $y = x^m$ pour un $m \in \mathbb{Z}$. On écrit $m = nq + r$ où $0 \leqslant r < n$ est le reste de la division euclidienne de m par n. Il s'ensuit $y = x^m = x^r \in \{e, x, x^2, \ldots, x^{n-1}\}$, ce qui termine la preuve. ■

Exemples. On constate que dans S_3, on a $\mathrm{ord}(e) = 1$, $\mathrm{ord}(213) = \mathrm{ord}(132) = \mathrm{ord}(321) = 2$ (ce sont des involutions) et $\mathrm{ord}(231) = \mathrm{ord}(312) = 3$. Comme autre exemple, dans $\mathbb{Z}_6$, on a $\mathrm{ord}(0) = 1$, $\mathrm{ord}(1) = \mathrm{ord}(5) = 6$, $\mathrm{ord}(2) = \mathrm{ord}(4) = 3$, et $\mathrm{ord}(3) = 2$ (donc 3 est une involution). Notez que, dans tous ces exemples, l'ordre d'un élément divise (sans reste) l'ordre du groupe ! On montrera plus tard que c'est un phénomène général.

Dans le cas où les éléments d'un groupe correspondent à des transformations d'un objet, comme les manipulations d'un cube de Rubik, le phénomène décrit par la Proposition 1.7 correspond à dire qu'on revient inévitablement à la configuration de départ en répétant une même transformation un nombre suffisant de fois. Ainsi, on doit répéter 105 fois la séquence qui consiste à tourner la face gauche d'un quart de tour dans le sens horaire puis la face avant d'une même façon, avant de revenir au cube dans sa position originale. Il y a une (autre) séquence de mouvements qui nécessite d'être répétée 1260, et c'est l'ordre le plus grand d'un élément du groupe du cube Rubik.

Remarque. Observons que, dans un groupe G, si $\mathrm{ord}(x) = n$ alors $x^{-1} = x^{n-1}$. En effet,

$$x^{n-1}x = x^n = e = x\,x^{n-1}.$$

En particulier, si G est un groupe fini engendré par S, alors tous les générateurs sont d'ordre fini et $s^{-1} = s^{d-1}$, avec $d = \mathrm{ord}(s)$ pour $s \in S$. En vertu de la proposition 1.5, $x \in G$ s'écrit donc comme un produit de générateurs : $x = x_1 \ldots x_m$ (avec $x_i \in S$), et on n'a nul besoin de considérer les inverses. En effet, pour obtenir une telle expression à partir d'un produit constitué de générateurs et de leurs inverses, il suffit de remplacer chaque inverse s^{-1} (pour $s \in S$) par le mot s^{d-1}, où $d = \mathrm{ord}(s)$. Par exemple, S_3 est engendré par $\tau = (12)$ et $\sigma = (123)$, et $(13) = \tau\sigma^{-1}$. Mais σ est d'ordre 3, et donc $\sigma^{-1} = \sigma^2$. On obtient donc $(13) = \tau\sigma\sigma$.

Les groupes $(\mathbb{Z}_n, +)$. Le résultat qui suit donne l'ordre d'un élément de $\mathbb{Z}_n$.

Proposition 1.8. *Soit $x \in \mathbb{Z}_n$ et $d = \mathrm{pgcd}(x, n)$, alors $\mathrm{ord}(x) = n/d$.*

Démonstration. Considérons les deux entiers $k := n/d$ et $\ell := x/d$, pour lesquels on a $\mathrm{pgcd}(k, \ell) = 1$. En effet, si d' divise k et ℓ, alors $d'd$ divise x et n. Or $d = \mathrm{pgcd}(x, n)$, donc $d' = 1$. Calculant dans $\mathbb{Z}_n$, on a (en notation additive)

$$k \cdot x = k(d\ell) = n\,\ell = 0.$$

En vertu de la proposition 1.7, il suffit donc de montrer que k est minimum pour cette propriété. Si $k' \leqslant k$ est tel que $k' \cdot x = 0$, alors $k'x = k'\ell d = bn = bkd$, pour un certain $b \in \mathbb{Z}$. Il s'ensuit que $k'\ell = bk$.

Comme k et l sont premiers entre eux, le lemme de Gauss entraîne que k divise k', et donc $k = k'$ car $k' \leqslant k$. ■

On a vu précédemment que les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ sont les $n\mathbb{Z}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. La proposition suivante donne un analogue pour le groupe des entiers modulaires.

Proposition 1.9. *Les seuls sous-groupes de $(\mathbb{Z}_n, +)$ sont les $\langle k \rangle$ tel que k divise n (et d'ordre n/k). En particulier, la fonction $k\mathbb{Z} \mapsto \langle k \rangle$ est une bijection entre l'ensemble des sous-groupes $k\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$ tel que k divise n et l'ensemble des sous-groupes de $(\mathbb{Z}_n, +)$.*

Démonstration. Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{Z}_n, +)$. Considérons $K = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, (x \bmod n) \in H\}$. Montrons que K est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ contenant $n\mathbb{Z}$. Observons que K est non vide, car $0 \in K$, car $(0 \bmod n) \in H$. De même, puisque $(n \bmod n) = 0$, on obtient que $n \in K$. Soit $x, y \in K$ alors $(x - y \bmod n) = (x \bmod n) - (y \bmod n) \in H$, car H est un sous-groupe de $\mathbb{Z}_n$. Donc $K \leqslant \mathbb{Z}$. Comme K est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$, on sait qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $K = k\mathbb{Z}$. Puisque $n \in K = k\mathbb{Z}$ et $n\mathbb{Z} = \langle n \rangle$ est le plus petit sous-groupe contenant n, on a $n\mathbb{Z} \subseteq k\mathbb{Z}$. Donc tout élément de $y \in K$ s'écrit $y = qk$ et donc tout élément de H s'écrit sous la forme $(y \bmod n) = q \cdot (k \bmod n)$. D'où $K = \langle (k \bmod n) \rangle$. Puisque $n\mathbb{Z} \subseteq k\mathbb{Z}$, on a que k divise n et donc $\operatorname{pgcd}(n, k) = k$. En vertu de la proposition 1.8, on conclut que

$$|H| = |\langle (k \bmod n) \rangle| = n/k.$$

On laisse en exercice la dernière partie de la proposition. ■

Exemple. Les sous-groupes de $\mathbb{Z}_6$ sont $\{0\}$, $\langle 2 \rangle = \{0, 2, 4\}$, $\langle 3 \rangle = \{0, 3\}$ et $\langle 1 \rangle = \mathbb{Z}_6$, qui sont les images par la bijection de la proposition ci-dessus des sous-groupes $6\mathbb{Z}$, $2\mathbb{Z}$, $3\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}$.

On observe que l'ordre des éléments de $\mathbb{Z}_n$ divise l'ordre de $\mathbb{Z}_n$. Par exemple, l'ordre de 30 dans $(\mathbb{Z}_{42}, +)$ est $42/\operatorname{pgcd}(30, 42) = 7$. En fait, comme on le verra au Chapitre 4, cette propriété est vraie pour tout groupe fini. C'est le théorème de Lagrange (voir Théorème 3.10).

Corollaire 1.10. *Soit $n \in \mathbb{N}$, alors*

(1) *$x \in \mathbb{Z}_n$ engendre $(\mathbb{Z}_n, +)$ si et seulement si $\operatorname{pgcd}(x, n) = 1$.*
(2) *$(\mathbb{Z}_n)^\times$ est l'ensemble des générateurs de $\mathbb{Z}_n$.*

Démonstration. Exercice. ■

1.6 Le groupe symétrique

Considérons plus en détail le groupe symétrique S_E, des permutations d'un ensemble E de cardinal n. Commençons par calculer son ordre.

Proposition 1.11. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors $|S_n| = n!$. Plus généralement, si E et F sont deux ensembles de cardinal n, alors l'ensemble $\mathcal{B}(E,F)$ des bijections de E dans F est de cardinal $n!$.*

Démonstration. Il est bien connu que le nombre de permutation de l'ensemble $[n]$, c'est-à-dire le cardinal de S_n, est $n!$ On montre l'énoncé plus général de la proposition par récurrence sur n. Si $n = 1$ il y a une et une seule fonction $E = \{x\} \to F = \{y\}$, qui est clairement bijective. Donc $\mathcal{B}(E,F) = 1 = 1!$ dans ce cas. Supposons maintenant la propriété vraie pour $n-1 \geqslant 1$: si E' et F' sont deux ensembles de cardinal $n-1$, alors $|\mathcal{B}(E',F')| = (n-1)!$. Soit $x \in E$. Alors, pour tout $y \in F$, on a $|E\backslash\{x\}| = |F\backslash\{y\}| = n-1$. Donc par récurrence, $|\mathcal{B}(E\backslash\{x\}, F\backslash\{y\})| = (n-1)!$ pour tout $y \in F$. Si $\alpha \in \mathcal{B}(E\backslash\{x\}, F\backslash\{y\})$ alors la fonction $f : E \to F$ telle que $f|_{E\backslash\{x\}} = \alpha$ et $f(x) = y$ est une bijection de E dans F (à vérifier). Donc pour tout $y \in F$, il y a $(n-1)!$ bijection de E dans F tel que $f(x) = y$. C'est-à-dire que l'ensemble $A_y = \{f \in \mathcal{B}(E,F) \,|\, f(x) = y\}$ est de cardinal $(n-1)!$ pour tout $y \in F$. On peut vérifier que $\{A_y \,|\, y \in F\}$ est une partition de l'ensemble $\mathcal{B}(E,F)$ (exercice). D'où

$$|\mathcal{B}(E,F)| = \sum_{y\in F} |A_y| = \sum_{y\in F} (n-1)! = |F| \cdot (n-1)! = n(n-1)! = n!.$$

Donc la propriété est vraie au rang n, et la proposition s'ensuit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. ∎

Pour faciliter la présentation, on choisit de prendre $E = \{1, 2, \ldots, n\}$, mais certaines de nos observations s'appliquent au cas général[11]. On a déjà montré que S_n, muni de la composition de fonctions, est un groupe d'ordre $n!$, qui est non abélien en général. C'est notre premier exemple de groupe fini non abélien (le groupe linéaire est un groupe infini non abélien). Comme nous allons le voir plus tard, tout groupe fini est une copie d'un sous-groupe d'un groupe symétrique (théorème de Cayley[12]). La question de trouver tous les sous-groupes d'un groupe symétrique est donc étroitement liée à la classification de tous les groupes finis !

Voici quelques propriétés combinatoires du groupe symétrique.

Une **inversion**[13] d'une permutation $\sigma \in S_n$ est un couple (i,j) tel que :

$$1 \leqslant i < j \leqslant n \quad \text{et} \quad \sigma(i) > \sigma(j).$$

On dit du nombre d'inversions de la permutation $\sigma \in S_n$ que c'est la **longueur** de σ. Ce nombre est noté :

$$\ell(\sigma) = |\{(i,j) \,|\, 1 \leqslant i < j \leqslant n \text{ et } \sigma(i) > \sigma(j)\}|.$$

11. Les exceptions à ce principe concernent les cas où on exploite l'ordre entre les entiers. Bien entendu, il n'y a pas d'ordre particulier qu'on puisse ainsi exploiter pour un ensemble E en général.

12. Arthur Cayley (1821-1895).

13. Observons que cette notion utilise l'ordre sous-jacent sur les entiers.

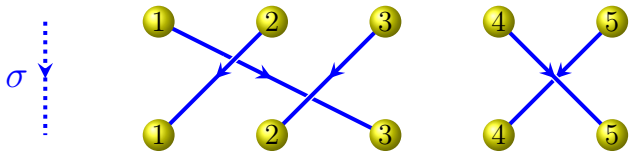
On établie facilement que $\ell(\sigma) = 0$ si et seulement si $\sigma = e$. En effet, il est clair que la longueur de e est 0, puisque e n'a pas d'inversion. Inversement, si $\ell(\sigma) = 0$ alors on doit avoir $\sigma(1) < \sigma(2) < \cdots < \sigma(n)$, d'où $\sigma = 12\ldots n = e$. Par exemple, l'ensemble des inversions de $\sigma = 24513$ est

$$\{(1,4),\ (2,4),\ (2,5),\ (3,4),\ (3,5)\},$$

et donc $\ell(\sigma) = 5$. Dans S_3, on a

$$\ell(123) = 0, \quad \ell(213) = 1, \quad \ell(132) = 1, \quad \ell(231) = 2, \quad \ell(312) = 2, \quad \text{et} \quad \ell(321) = 3.$$

Une manière agréable de visualiser les inversions d'une permutation est d'utiliser la représentation suivante. On dispose sur chacune de deux lignes superposées les nombres de 1 à n, et on joint par une flèche le i apparaissant sur la ligne du haut à $\sigma(i)$ sur celle du bas. Ainsi, la permutation $\sigma = 31254$ se représente comme suit :



Le nombre d'inversions d'une permutation est alors le nombre de croisements dans la figure. La composition $\tau\sigma$, de deux permutations σ et τ de S_n, correspond à superposer deux tels diagrammes de flèches, plaçant celui de σ au-dessus de celui de τ. Ainsi, le composé de $\tau = 12435$ et $\sigma = 31254$ s'obtient en « suivant » les flèches dans la figure obtenue par cette superposition. Pour, $1 \leqslant i < n$,

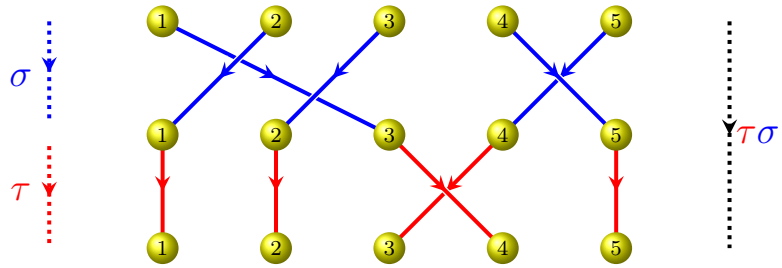


FIGURE 1.4 – Composition de permutations

la **transposition adjacente** τ_i est la permutation qui échange i et $i+1$ et laisse fixe tout autre $j \in \{1\ldots n\}\backslash\{i, i+1\}$. En formule,

$$\tau_i(j) = \begin{cases} i+1 & \text{si } j = i, \\ i & \text{si } j = i+1, \\ j & \text{autrement.} \end{cases}$$

Les transpositions sont des involutions, c'est-à-dire que $\tau_i^2 = e$, ou encore que $\tau_i^{-1} = \tau_i$. Multiplier à droite par τ_i revient à échanger $\sigma(i)$ et $\sigma(i+1)$ dans σ, c.-à-d.

$$\sigma\,\tau_i = \sigma(1)\sigma(2)\cdots\sigma(i-1)\,\underbrace{\sigma(i+1)\sigma(i)}\,\sigma(i+2)\cdots\sigma(n).$$

Cela se voit bien sur un diagramme de flèches. Ainsi, on a

$$24513 = 24153\ \tau_3 = 21453\ \tau_2\tau_3 = 12453\ \tau_1\tau_2\tau_3 = 12435\ \tau_4\tau_1\tau_2\tau_3 = \tau_3\tau_4\tau_1\tau_2\tau_3.$$

Observons ici que multiplier par τ_i revient à augmenter ou diminuer la longueur par 1 ! Ce phénomène est général, comme le montre le lemme suivant.

Lemme 1.12. *Soit $\sigma \in S_n$ et $1 \leqslant i < n$, alors $\ell(\sigma\tau_i) = \ell(\sigma) \pm 1$. Plus précisément,*

$$\ell(\sigma\tau_i) = \begin{cases} \ell(\sigma) + 1 & \text{si } \sigma(i) < \sigma(i+1), \\ \ell(\sigma) - 1 & \text{si } \sigma(i) > \sigma(i+1). \end{cases}$$

De plus, $\ell(\sigma) = 0$ si et seulement si $\sigma = e$ et, si $\sigma \neq e$, il existe $1 \leqslant i \leqslant n-1$ tel que $\ell(\sigma\tau_i) = \ell(\sigma) - 1$.

Démonstration. Posons $\sigma = a_1a_2\ldots a_n$ où $a_i = \sigma(i)$. Comme on l'a déjà observé, $\alpha = \sigma\tau_i = a_1\ldots a_{i-1}a_{i+1}a_ia_{i+2}\ldots a_n$ s'obtient à partir de σ en échangeant la i-ème et la $i+1$-ème lettre. On observe d'abord que toute inversion $(k,l) \neq (i,i+1)$ de σ correspond à une inversion $(k',l') \neq (i,i+1)$ de α et vice versa : par exemple, si (i,k) est une inversion de α alors $(i+1,k)$ est une inversion de α car $a_i = \sigma(i) = \sigma\tau_i(i+1) = \alpha_{i+1}$ et $\sigma(k) = \alpha_k$; les autres cas sont laissés en exercices pour le lecteur. En d'autres termes, le nombre d'inversions de σ différentes de $(i,i+1)$ est égal au nombre d'inversions de α différentes de $(i,i+1)$.

Finalement, si $a_i = \sigma(i) < \sigma(i+1) = a_{i+1}$, alors $(i,i+1)$ n'est pas une inversion de σ. Mais puisque $\alpha(i) = a_{i+1} > a_i = \alpha(i+1)$, alors $(i,i+1)$ est une inversion de α. Dans ce cas, α a une inversion de plus que σ. Si par contre $a_i = \sigma(i) > \sigma(i+1) = a_{i+1}$, alors $(i,i+1)$ est une inversion de σ. Mais puisque $\alpha(i) = a_{i+1} < a_i = \alpha(i+1)$, alors $(i,i+1)$ est une inversion de α. Dans ce cas, α a une inversion de moins que σ.

Maintenant, si $\ell(\sigma) = 0$ on a vu après la définition de la longueur que $\sigma = e$. Le dernier énoncé en découle sans difficulté et est laissé en exercice au lecteur. ∎

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer la proposition suivante, qui permet de donner un système de générateurs pour S_n. Nous allons aussi voir qu'elle permet de comprendre d'une autre manière la longueur $\ell(\sigma)$.

Proposition 1.13. *Toute permutation $\sigma \in S_n$ est un produit de $\ell(\sigma)$ transpositions adjacentes. En d'autres termes : $S_n = \langle \tau_1, \ldots, \tau_{n-1} \rangle$.*

Démonstration. Par récurrence sur $\ell(\sigma)$. Si $\ell(\sigma) = 0$, alors $\sigma = e$ est l'identité, qui correspond au produit vide. Supposons $\ell(\sigma) > 0$, alors $\sigma \neq e$. Il existe donc i tel que $\sigma(i) > \sigma(i+1)$ grâce au lemme 1.12. Ainsi, toujours en vertu du lemme 1.12, $\ell(\sigma\tau_i) = \ell(\sigma) - 1 < \ell(\sigma)$. Par hypothèse de récurrence, $\sigma\tau_1$ est égal à un produit de $\ell(\sigma\tau_i)$ transpositions adjacentes. Donc $\sigma = \sigma\tau_i\tau_i^{-1} = (\sigma\tau_i)\tau_i$ (car τ_i est une involution) est un produit de $\ell(\sigma)$ transpositions adjacentes. ∎

Signature d'une permutation. Une autre utilité de la longueur est de permettre la définition suivante. On considère la fonction

$$\varepsilon : S_n \to \{\pm 1\}, \qquad \text{avec} \qquad \varepsilon(\sigma) := (-1)^{\ell(\sigma)}.$$

On dit de $\varepsilon(\sigma)$ que c'est le **signe** de la permutation σ. Dans un cours d'algèbre linéaire, on montre que

$$\det(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{1,\sigma(1)}a_{2,\sigma(2)}\cdots a_{n,\sigma(n)}, \tag{1.6}$$

pour toute matrice $(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

Corollaire 1.14. *Pour tout σ, et τ dans S_n, on a*

$$\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau).$$

Démonstration. Il suffit de montrer que

$$\ell(\sigma\tau) \equiv \ell(\sigma) + \ell(\tau) \pmod 2. \tag{1.7}$$

En effet, on aura alors $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\ell(\sigma\tau) = \ell(\sigma) + \ell(\tau) + 2k$ et donc que

$$\varepsilon(\sigma\tau) = (-1)^{\ell(\sigma\tau)} = (-1)^{\ell(\sigma)+\ell(\tau)+2k} = (-1)^{\ell(\sigma)}(-1)^{\ell(\tau)}((-1)^2)^k = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau).$$

L'égalité (1.7) est laissée en exercice. ∎

Ordre et cycles d'une permutation. La notion de cycle[14] est fondamentale dans le groupe symétrique. Elle rend possible une nouvelle décomposition des permutations. Cette décomposition permet entre autre de calculer différemment l'ordre.

Pour $1 < p \leqslant n$, on dit d'une permutation $\gamma \in S_n$ que c'est un un ***p*-cycle** (ou simplement que c'est un **cycle**) s'il existe p entiers distincts $1 \leqslant a_1, a_2, \ldots, a_p \leqslant n$ tels que

$$\gamma(a_1) = a_2, \quad \gamma(a_2) = a_3, \quad \ldots \quad \gamma(a_j) = a_{j+1}, \quad \ldots \quad \text{et} \quad \gamma(a_p) = a_1;$$

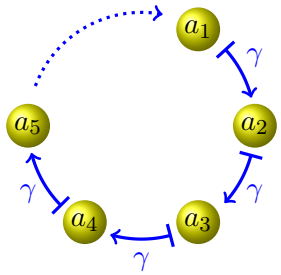


FIGURE 1.5 – Un cycle.

avec de plus $\gamma(b) = b$ pour tout $b \notin \{a_1 \dots, a_p\}$. On dit de ces derniers b, que ce sont des points fixes de γ. La figure 1.5 représente un cycle de façon plus imagée.

On dénote habituellement par $(a_1, a_2 \dots, a_p)$ un tel cycle γ. Les parenthèses soulignent qu'on parle d'un cycle. Pour alléger la notation, on omet les virgules lorsque c'est possible. Notons que les points laissés fixes par γ n'apparaissent pas dans cette notation. On dit de p que c'est la **longueur** du cycle γ. Par définition, une **transposition** est un 2-cycle, et elle est de la forme (i, j), pour $i \neq j$. La transposition adjacente τ_i, déjà vue, s'écrit donc aussi $\tau_i = (i, i+1)$. Enfin, si $p = n$, on dit qu'on a une permutation **circulaire**. Comme nous allons le constater, les permutations circulaires dans S_n, pour $n > 1$, sont les seules qui n'ont pas de point fixe. Par exemple, la permutation

$$\gamma = 24351 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} = (1245)$$

est un 4-cycle dans S_5, car $\gamma(1) = 2$, $\gamma(2) = 4$, $\gamma(4) = 5$ et $\gamma(5) = 1$. Son seul point fixe est $\gamma(3) = 3$. De plus, l'inverse de γ est aussi un 4-cycle. En effet, $\gamma^{-1} = 51324 = (1542)$ s'obtient en « lisant le cycle γ à l'envers ». Notons d'autres parts que $\gamma^2 = 45312$ n'est pas un cycle, car $\gamma^2(1) = 4$, $\gamma^2(4) = 1$, $\gamma^2(2) = 5$ et $\gamma^2(5) = 2$. En général, le produit de cycles n'est pas un cycle. Plus généralement, on a la propriété suivante.

Proposition 1.15. *Si $\gamma = (a_1 \dots, a_p) \in S_n$ un p-cycle, alors*

(1) $\gamma^{-1} = (a_1, a_p, a_{p-1} \dots a_2)$ *est un p-cycle ;*

(2) $\mathrm{ord}(\gamma) = p$.

(3) *le signe de γ est $(-1)^{p-1}$.*

Démonstration. Voir exercice 1.30. ■

Pour deux entiers p et q, plus grands ou égaux à 2, on dit que des cycles $(a_1 \dots, a_p)$ et $(b_1 \dots, b_q)$ sont **à support disjoint**, ou plus simplement **disjoints**, si $\{a_1 \dots, a_p\} \cap \{b_1 \dots, b_q\} = \varnothing$. Par exemple,

14. Cette notion est générale, et s'applique aux permutations de tout ensemble fini E.

les cycles $(1,5,4)$ et $(2,3)$ sont à support disjoint ; tandis que les cycles $(1,5,2)$ et $(2,6,3)$ ne le sont pas. Deux cycles à support disjoint commutent, c.-à.d. si σ et τ sont des cycles à support disjoint, alors $\sigma\tau = \tau\sigma$. Le but de toute cette discussion est la proposition suivante.

Proposition 1.16. *Toute permutation (différente de l'identité) s'écrit de manière unique, à l'ordre des facteurs près, comme produit de cycles à support disjoint (et donc qui commutent).*

Plutôt que de démontrer cette proposition, nous allons illustrer le processus qui mène à cette décomposition pour une permutation particulière. La démonstration générale est laissée en exercice (ou voir [3]). Prenons $\sigma = 729158436 \in S_9$, et débutons avec 1. En calculant les images successives $\sigma(1) = 7$, $\sigma^2(1) = 4$, et $\sigma^3(1) = 1$, on trouve que σ contient le cycle $\gamma_1 := (174)$. La plus petite valeur qui n'est pas couverte par ce cycle est 2, et on constate que c'est un point fixe de σ. Puis viens 3, qui « engendre » le cycle $\gamma_2 := (3968)$. Le seul nombre qui reste est maintenant 5, qui est un point fixe. La décomposition résultante est donc

$$\sigma = \gamma_1\gamma_2 = (174)(3968) = \gamma_2\gamma_1 = (3968)(174).$$

L'unicité de la décomposition provient de l'unicité des cycles qui la compose. On observe que les cycles de σ sont de la forme

$$(x, \sigma(x), \sigma^2(x), \sigma^3(x), \ldots, \sigma^{d-1}(x)),$$

où d est l'ordre de x.

Une façon agréable de mettre en évidence la décomposition d'une permutation en cycles disjoints est de représenter la permutation comme à la figure 1.6. Dans celle-ci, on joint les éléments de l'ensemble sous-jacent par une flèche $i \to j$, si $\sigma(i) = j$. On voit bien ainsi apparaître les cycles disjoints, pour le moins que le dessin soit fait correctement.

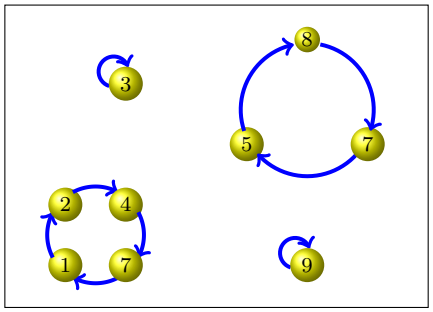


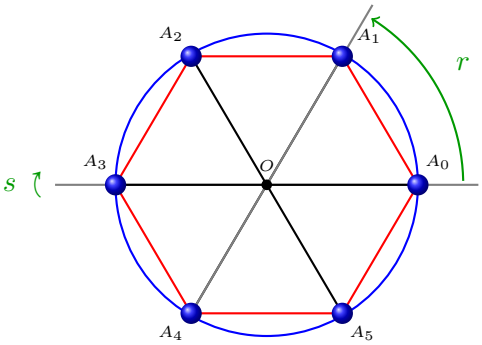
FIGURE 1.6 – La décomposition de la permutation 248736159 en cycles disjoints.

Corollaire 1.17. *Soit $\sigma = \gamma_1 \ldots \gamma_k \in S_n$ une permutation en cycle décomposée en cycles disjoints, alors* $\mathrm{ord}(\sigma) = \mathrm{ppcm}(\mathrm{ord}(\gamma_1), \mathrm{ord}(\gamma_2), \mathrm{ord}(\gamma_3) \ldots, \mathrm{ord}(\gamma_k))$. *De plus le signe de σ est $(-1)^{n-c(\sigma)}$, où $c(\sigma)$ est le nombre de cycles de σ.*

Démonstration. Exercice. ∎

Par exemple, avec la permutation $\sigma = 729158436 \in S_9$ de l'exemple précédent, on trouve de cette manière que $\mathrm{ord}(\sigma) = 12$, puisque c'est le plus petit commun multiple de 3 et 4, les longueurs des cycles de la décomposition de σ. Un problème amusant, et pas trivial, est de déterminer quel est le plus grand ordre possible pour un élément de S_n.

1.7 Les isométries d'un polygone et le groupe diédral



Le groupe D_6 agit sur l'hexagone.

Pour un entier $m \geqslant 3$, on considère le polygone plan régulier convexe P_m à m sommets $A_0 \ldots, A_{m-1}$ inscrits dans le cercle unité de centre O. Le **groupe diédral** D_m est le groupe des isométries du plan qui préserve P_m. On a donc que D_3 est le groupe des isométries du triangle, D_4 celui du carré, D_5 celui du pentagone, D_6 celui de l'hexagone, (voir la figure ci-contre), etc. On observe qu'un élément $f \in D_4$ (par exemple) est déterminé par une permutation des sommets A_0, A_1, A_2, A_3, où il est pratique de poser $A_k := A_{(k \bmod 4)}$ en général. On a donc $A_4 = A_0$, $A_5 = A_1$ etc. Parmi les éléments de D_4 on retrouve : l'identité e, la rotation r de centre 0 qui envoie A_k sur A_{k+1}, la rotation r^2 de centre 0 qui envoie A_k sur A_{k+2}, la rotation r^3 de centre 0 qui envoie A_k sur A_{k+3}, etc. On remarque que $r^4(A_0) = A_4 = A_0$ donc $r^4 = e$. De plus, on a la symétrie orthogonale s, d'axe OA_0, la symétrie orthogonale t dont l'axe est la médiatrice du segment $[A_0, A_1]$, la symétrie orthogonale s' d'axe OA_1 et la symétrie orthogonale t' dont l'axe est la médiatrice du segment $[A_1, A_2]$. On observe que

$$t = rs, \quad s' = r^2 s, \qquad t' = r^3 s.$$

On vérifie que ce sont les seuls éléments de D_4, et donc

$$D_4 = \{e, r, r^2, r^3, s, rs, r^2 s, r^3 s\}$$

est d'ordre $2 \cdot 4 = 8$. Plus généralement, pour $m \geqslant 3$, on considère s la **symétrie orthogonale** d'axe OA_0, et r la **rotation** de centre O et d'angle $2\pi/m$. On a alors

$$\begin{aligned} s(O) &= O \quad \text{et} \quad s(A_i) = A_{m-i}, \text{ pour tout } 1 \leqslant i \leqslant m-1, \\ r(A_i) &= A_{i+1}, \text{ pour tout } 1 \leqslant i \leqslant m-1, \text{ et } r(A_{m-1}) = A_0. \end{aligned}$$

Les transformations s et r préservent P_m, d'où on a la proposition suivante.

Proposition 1.18. *Soit $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 3$, alors*

(1) *$s, r \in D_m$. De plus,* $\mathrm{ord}(s) = 2$, $\mathrm{ord}(r) = m$, *et* $srs = r^{-1}$.

(2) $D_m = \langle r, s\rangle = \{r^k, sr^k \,|\, 0 \leqslant k \leqslant m-1\}$ *est un groupe d'ordre* $2m$.

Démonstration.

(1) La première partie de la proposition est une conséquence de ce qui précède. Pour ce qui est de la deuxième partie : par définition, une symétrie vérifie $s^2 = e$ et $s \neq e$ donc $\mathrm{ord}(s) = 2$. De plus, puisque $r^m(A_i) = A_i$, r^m $(m \geqslant 3)$ fixe au moins trois points du plan, donc $r^m = e$ et $r, r^2 \ldots, r^{m-1} \neq e$ donc $\mathrm{ord}(r) = m$ (le fait qu'une rotation d'angle $2\pi/m$ est d'ordre m est un résultat bien connu et que l'on vient de redémontrer). Maintenant : en posant $A_m = A_0$ on a

$$rsrs(A_i) = rsr(A_{m-i}) = rs(A_{m-i+1}) = r(A_{i-1}) = A_i$$

Ainsi $rsrs$ fixe plus de trois points du plan, donc $rsrs = e$. D'où la relation $srsr = e$.

(2) Les seules isométries qui préservent P_m sont :

(i) Les rotations d'angles $2k\pi/m$, c'est-à-dire, les r^k $(e = r^0)$.

(ii) Les symétries, ou symétries, d'axe OA_k et celles passant par les médiatrices des segments $[A_i, A_{i+1}]$ (qui peuvent être les mêmes, selon que si m est pair ou impair) : c'est à dire les sr^{m-k}.

D'où le résultat. ∎

Remarque. (a) La relation $rsrs = e$ suffit à construire D_m, pour peu que l'on sache que $s^2 = e$ et $r^m = e$, on dit que D_m est **présenté** par les **générateurs** s, r et les **relations** $s^2 = r^m = srsr = e$. On note ce fait comme suit

$$D_m = \langle s, r \,|\, s^2 = r^m = srsr = e\rangle.$$

(b) On observe que le produit $t = sr$ est une réflexion préservant P_m (laquelle ?). De plus, s et t engendrent D_m et des relations suffisantes pour construire D_m pour ces générateurs sont données ci-dessous :

$$D_m = \langle s, t \,|\, s^2 = (st)^m = t^2 = e\rangle.$$

On dit que D_m est engendré par réflexions.

1.8 Groupes engendrés par des réflexions

Les groupes symétriques et les groupes diédraux font partie (à isomorphisme [15] près) d'une famille de groupes de grand intérêt en recherche mathématique contemporaine. Ce sont des sous-groupes de

15. Voir Section (2.2).

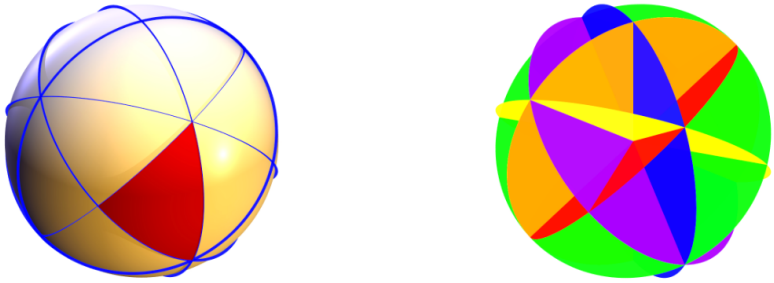


FIGURE 1.7 – Arrangement d'hyperplans dans $\mathbb{R}_3$, correspondant à S_4

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ qui s'obtiennent en composant des **réflexions** par rapport à des hyperplans, c'est-à-dire, des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n-1$. On observe qu'une réflexion est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui est son propre inverse. Dans $\mathbb{R}^4$, les matrices suivantes sont des matrices de réflexions :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

qui engendrent le groupe S_4. On s'aperçoit que ces matrices laissent fixes les vecteurs de la forme (a, a, a, a). On peut donc considérer la trace de l'action de S_4 sur le sous-espace vectoriel de dimension 3, orthogonal à ces vecteurs. Cette action est représentée à la figure 1.7. Dans la partie de droite de cette figure, les plans sont obtenus comme intersection [16] avec les hyperplans de réflexion. Il y a un plan pour chaque réflexion [17] dans le groupe. Pour que le groupe engendré soit fini, il y a de fortes contraintes sur les angles entre les hyperplans correspondant aux générateurs, comme on le voit à la figure 1.7, ainsi qu'à la figure 1.8. Dans la partie de gauche de la figure ci-haut, on voit l'intersection des plans avec la sphère de rayon 1. Les angles entre les plans sont ainsi mis en évidence, et le triangle rouge contient un angle de $\pi/2$ et deux angles de $\pi/3$. Ces contraintes sur les angles permettent de déterminer quels sont tous les groupes finis de ce genre. Un autre exemple que nous verrons plus tard (Voir Section 3.1) est le groupe « diédral ». Plus généralement, parmi les groupes engendrés par les réflexions, on retrouve les groupes de Coxeter [18] qui jouent un rôle fondamental dans plusieurs domaines des mathématiques, de la physique, et en cristallographie.

16. Pour plus de détails, voir Swallowtail on the shore, dans la série de textes *Snapshots of modern mathematics from Oberwolfach*, No7/2014.

17. Attention, le groupe contient aussi d'autres éléments.

18. Les travaux de H.S.M. Coxeter, (1907-2003), ont inspiré plusieurs des oeuvres artistiques de M.C. Escher (1898-1972).

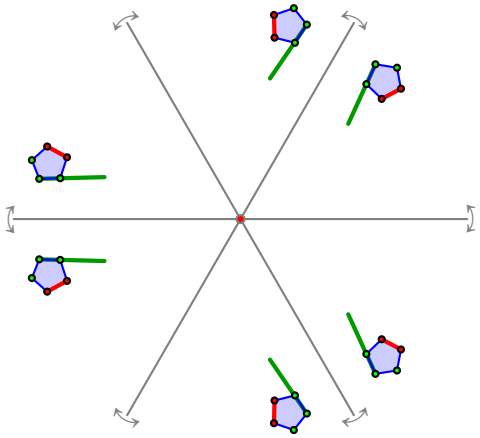


FIGURE 1.8 – Réflexions selon des droites d'angles $2\,k\,\pi/6$, avec $0 \leqslant k \leqslant 2$.

1.9 Un groupe à la Galois

On considère, sur le sous-ensemble de $\mathbb{C}$ dont les éléments sont de la forme

$$a + b\,\zeta + c\,\zeta^2 + d\,\zeta^3 + e\,\zeta^4, \qquad \text{pour} \qquad \zeta = \exp(2\,i\,\pi/5),$$

avec a, b, c, d, et e des nombres réels, la restriction des « transformations » $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ vérifiant :

(1) $f(x+y) = f(x) + f(y)$, pour tout $x, y \in \mathbb{C}$,

(2) $f(x\,y) = f(x)\,f(y)$, pour tout $x, y \in \mathbb{C}$,

(3) $f(r) = r$, si et seulement si $r \in \mathbb{R}$.

L'ensemble de ces transformations forme un groupe G pour la composition. Les conditions ci-dessus entraînent aussi que

$$f(a + b\,\zeta + c\,\zeta^2 + d\,\zeta^3 + e\,\zeta^4) = a + b\,f(\zeta) + c\,f(\zeta)^2 + d\,f(\zeta)^3 + e\,f(\zeta)^4,$$

avec

$$f(\zeta)^5 = f(\zeta^5) = f(1) = 1.$$

Autrement dit, la transformation f est entièrement caractérisée par la valeur de $f(\zeta)$. Il n'y a que 4 choix possibles pour $f(\zeta)$, ce sont les quatre **racines 5e de l'unité** différentes [19] de 1 :

$$f_k(\zeta) = \zeta^k, \qquad 1 \leqslant k \leqslant 4,$$

19. Ceci résulte de la condition (3).

avec la propriété $f_k \circ f_j = f_{k\,j}$ (loi des exposants). On observe que f_1 est l'identité, et le groupe G est donc constitué de $\{e, f_2, f_3, f_4\}$. On trouve, par un calcul direct qui exploite le fait que

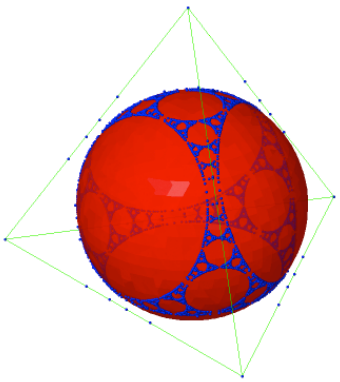
$$\zeta^5 = 1, \quad \zeta^6 = \zeta, \quad \zeta^7 = \zeta^2, \quad \dots$$

que la table de multiplication de G est

	e	f_2	f_3	f_4
e	e	f_2	f_3	f_4
f_2	f_2	f_4	e	f_3
f_3	f_3	e	f_4	f_2
f_4	f_4	f_3	f_2	e

Ce qui permet de constater que c'est bien un groupe. Sous une forme « déguisée » [20], c'est en fait le groupe cyclique $\mathbb{Z}_4$. La théorie de Galois ramène l'étude des racines de polynômes à l'étude d'un groupe de Galois qui lui est associé en généralisant la construction que l'on vient de considérer. Dans notre cas, nous avons calculé le groupe de Galois du polynôme $p(z) = a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4$.

Conclusion



Pour de nombreuses utilisations en mathématique, en physique, et dans d'autres domaines, il importe de mieux comprendre la structure des groupes, et leurs propriétés. Parmi les problèmes centraux et encore de grande actualité : la recherche des plus petits ensembles de générateurs d'un groupe, où la détermination de tous ses sous-groupes, sont deux problèmes difficiles de la théorie générale des groupes. Un autre axe très important est la recherche en théorie de la représentation des groupes. Enfin, une des grandes réalisations des algébristes du XXe siècle a été de classifier tous les groupes finis (voir l'atlas des groupes finis Atlas des groupes finis).

Nous allons développer dans la suite du cours quelques-unes des techniques de base développées pour répondre à de telles questions : morphismes de groupes, classes d'isomorphisme, groupes quotients, etc. Par exemple, nous allons voir que si un groupe est monogène, alors c'est une « copie » de $\mathbb{Z}$ s'il est infini ou c'est une « copie » de $\mathbb{Z}_n$ s'il est fini. Nous aurons alors classifié tous les groupes monogènes (et par ricochet aussi leurs sous-groupes et générateurs) !

20. À ce sujet, voir la notion d'isomorphisme, Section 2.2.

1.10 Exercices

Exercice 1.1. Soit la loi de composition $\star : (a, b) \mapsto ab + a + b$ sur $\mathbb{R}$. Est-ce que $\star$ est associative ? Commutative ?

Exercice 1.2. Soit la loi de composition $\star : (A, B) \mapsto AB + \mathrm{Id}$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées $n \times n$. Est-ce que $\star$ est associative ? Commutative ?

Exercice 1.3. Montrer que l'inverse de l'élément neutre d'un groupe est égal à lui-même, et montrer que l'inverse de l'inverse de x est égal à x.

Exercice 1.4. Soit E un ensemble muni d'une multiplication et d'une addition. On considère dans E la loi de composition $\star : (a, b) \mapsto ab + a + b$.

(a) Posons $E = \mathbb{R}$. Est-ce que $(\mathbb{R}, \star)$ possède un élément neutre ? (justifier). Lesquels des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants sont stables pour $\star$:

$$\mathbb{N}, \quad \mathbb{Q}^-, \quad \mathbb{Q}^{+*}, \quad \mathbb{R}, \quad \text{et} \quad n\mathbb{Z}.$$

(b) Mêmes questions avec $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $E = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 1.5. On considère les ensembles $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{Q}^{+*}$, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^{+*}$, $\mathbb{Z}^-$, $\mathbb{Q}^-$ et $\mathbb{R}^-$. Parmi ces ensembles, lesquels sont des groupes ou des monoïdes pour : (a) l'addition sur $\mathbb{R}$; (b) la multiplication sur $\mathbb{R}$. Justifier et préciser l'ensemble de leurs éléments inversibles.

Exercice 1.6. Pour tout espace vectoriel V, déduire de la définition d'espace vectoriel que $(V, +)$ est un groupe. En conclure que $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$ est un groupe.

Exercice 1.7. Soit G un ensemble muni d'une loi de composition $*$. Montrer que $(G, *)$ est un groupe si et seulement si

(a) $*$ est associative ;

(b) il existe $e \in G$ tel que pour tout $x \in G$, $x * e = x$; (**élément neutre à droite**) ;

(c) pour tout $x \in G$, il existe $y \in G$ tel que $x * y = e$. (**élément inversible à droite**).

Exercice 1.8. Soit E un ensemble.

(a) Montrer que $(\mathcal{P}(E), \cup)$ et $(\mathcal{P}(E), \cap)$ sont des monoïdes. Sont-ils des groupes ?

(b) On considère dans $\mathcal{P}(E)$ la loi de composition

$$(A, B) \mapsto A \vartriangle B = (A \cup B) \backslash (A \cap B) \quad (\textbf{Différence symétrique}).$$

Montrer que $(\mathcal{P}(E), \vartriangle)$ est un groupe. Quel est son élément neutre ? Quel est l'inverse de A ? Est-ce un groupe abélien ?

Exercice 1.9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer que $(\mathbb{Z}_n, +)$ est un groupe abélien de cardinal n.

(b) Montrer que $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$ est un monoïde commutatif. Est-ce un groupe ? (Justifier.)

(c) Montrer que $((\mathbb{Z}_n)^\times, \cdot)$ est un groupe abélien de cardinal $\varphi(n)$ (la **fonction d'Euler**, dont la valeur est le nombre d'entiers relativement premiers à n, entre 1 et $n-1$.)

(d) Soit la loi de composition $\star : (a, b) \mapsto ab + a + b$ dans $\mathbb{Z}_n$. Est-ce que $\star$ possède un élément neutre ? (Justifier.) Est-ce que $(\mathbb{Z}_n)^\times$ est stable pour $\star$?

Exercice 1.10. Soit E un ensemble. Montrer que la composition de fonction munie l'ensemble $\mathrm{Fonct}(E, E)$ d'une structure de monoïde.

Exercice 1.11. (voir Proposition 1.3) Montrer que les seuls sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ sont de la forme $(n\mathbb{Z}, +)$, pour $n \in \mathbb{N}$ (indication : si H est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$, considérer n égal au plus petit entier positif non null dans H).

Exercice 1.12. (voir Proposition 1.4) Soit G un groupe. Montrer que

(a) Soit $H \subseteq G$, alors H est un sous-groupe de G si et seulement si H est non vide et pour tout $x, y \in H$, $xy^{-1} \in H$.

(b) Si $H \leqslant G$ et $K \leqslant H$ alors $K \leqslant G$ (la relation $\leqslant$ est transitive).

(c) L'intersection non vide d'une famille de sous-groupes de G est un sous-groupe de G.

Exercice 1.13. Soit G un groupe. On suppose que pour tout $x \in G$ on a $x^2 = e$. Montrer que G est abélien.

Exercice 1.14. Soit G un groupe et soit $a, b \in G$ tel que $a^5 = e$ et $a^3 b = ba^3$.

(a) Montrer que $a^6 b = ba^6$;

(b) en déduire que $ab = ba$.

Exercice 1.15. Déterminer lesquels des énoncés ci-dessous est vrai ou faux. Si il est vrai, en donner une démonstration ; si il est faux, en donner un contre-exemple.

(a) Si $x^2 = e$, alors $x = e$.

(b) Si $x^2 = a^2$, alors $x = a$.

(c) Pour tout $a, b \in G$, on a $(ab)^2 = a^2 b^2$.

(d) Si $x^2 = x$, alors $x = e$.

(e) Pour tout $x \in G$, il existe $y \in G$ tel que $x = y^2$.

(f) Pour tout $x, y \in G$, il existe un élément $z \in G$ tel que $y = xz$.

Exercice 1.16. (voir Proposition 1.6) Soit $G = \langle s \rangle$ un groupe monogène.

(a) Vérifier que $G = \{s^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. En déduire que G est un groupe abélien. Comment s'écrit G si la loi est notée additvement ?

(b) Montrer que la fonction $f : \mathbb{Z} \to \langle x \rangle$, définie par $f(k) = x^k$, est surjective et que $f(k+l) = f(k)f(l)$.

1. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\{k \in \mathbb{Z} \mid f(z) = e\} = n\mathbb{Z}$.

Exercice 1.17. Montrer que le centre $Z(G)$ d'un groupe est un sous-groupe de G. Calculer le centre de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Dans quel cas $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est commutatif.

Exercice 1.18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer que l'ensemble $O(n) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tMM = \mathrm{Id}_n\}$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. C'est le **groupe orthogonal**. Rappelons que ${}^tM$ désigne la transposée de M.

(b) Montrer que l'ensemble $SO(n) = \{M \in O(n) \mid \text{dét}(M) = 1\}$ est un sous-groupe de $O(n)$. C'est le **groupe spécial orthogonal**. Rappelons que

$$SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 1.19. Soit G un groupe et $A \subseteq G$. Pour $g \in G$ on note $gAg^{-1} = \{gxg^{-1} \mid x \in A\}$.

(a) Montrer que $Z(A) = \{g \in G \mid gx = xg, \text{ pourtout } x \in A\}$ est un sous-groupe de G.

(b) Montrer que gAg^{-1} et A sont en bijection.

(c) Montrer que $N(A) = \{g \in G \mid gAg^{-1} = A\}$ est un sous-groupe de G.

(d) Montrer que $Z(A) \leqslant N(A)$.

Exercice 1.20.

(a) Quel est le centre du groupe S_n, pour $n \in \mathbb{N}^*$?

(b) Montrer que G est un groupe abélien si et seulement si G est égal à son centre.

Exercice 1.21. Soit G un groupe et H, H' deux sous-groupes de G. Montrer que $H \cup H'$ est un sous-groupe de G si et seulement si $H \subseteq H'$ ou $H' \subseteq H$.

Exercice 1.22. Soit G un groupe. On dit que x et y sont **conjugués** dans G s'il existe $g \in G$ tel que $x = gyg^{-1}$. On notera $x \sim y$.

(a) Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur G. La classe d'équivalence de $x \in G$ est appelée **classe de conjugaison de x**.

(b) Soit $x \in G$, montrer que l'ensemble $G_x = \{g \in G \mid gxg^{-1} = x\}$ est un sous-groupe de G, appelé sous-groupe stabilisateur de $x \in G$.

Exercice 1.23. Soit G un groupe et $g \in G$. Montrer que

(a) Si $\mathrm{ord}(g) = \infty$ alors $\mathrm{ord}(g^k) = \infty$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

(b) Si $\mathrm{ord}(g) = n$ est fini et $k \in \mathbb{N}^*$, alors $\mathrm{ord}(g^k) = n/\mathrm{pgcd}(n, k)$.

(c) $\mathrm{ord}(g^{-1}) = \mathrm{ord}(g)$.

Exercice 1.24. Soit le groupe $G = \mathbb{Z}_{12}$.

(a) Déterminer le sous-groupe H de G engendré par 6 et 8. Déterminer son ordre.

(b) Caractériser les générateurs de G.

(c) Quel est l'ordre de l'élément 9 ?

Exercice 1.25. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer que la fonction $k\mathbb{Z} \mapsto \langle k \rangle$ est une bijection entre l'ensemble des sous-groupes $k\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$ tel que k divise n, et l'ensemble des sous-groupes de $\mathbb{Z}_n$.

(b) Montrer que $\mathbb{Z}_n = \langle x \rangle$ si et seulement si $\text{pgcd}(x, n) = 1$.

(c) On considère le monoide multiplicatif $\mathbb{Z}_n$ et on note $(\mathbb{Z}_n)^\times$ son ensemble d'éléments inversibles. Montrer que $(\mathbb{Z}_n)^\times$ est l'ensemble des générateurs de $(\mathbb{Z}_n, +)$.

Exercice 1.26. On considère dans cet exercice le groupe symétrique S_4. Avec nos conventions, on a les transpositions adjacentes

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 2134 \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = 1324 \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = 1243.$$

(a) Écrire tous les éléments de S_4 comme un produit des transpositions adjacentes τ_i ;

(b) Calculer les ordres et les longueurs des éléments de S_4.

(c) On considère les sous-groupes

$$H = \langle \tau_1, \tau_2 \rangle ; \quad K = \langle \tau_2, \tau_3 \rangle \quad \text{et} \quad L = \langle \tau_1, \tau_3 \rangle .$$

(i) Quels sont les ordres de H, K et L ?

(ii) Écrire la table de multiplication de ces sous-groupes. Sont-ils abéliens ?

(iii) Que remarquez-vous ?

Exercice 1.27. (**Relations de tresse**) Dans S_n, avec $\tau_i := (i, i+1)$, montrer que pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant n$, on a

$$\tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i, \qquad \text{si} \qquad |i - j| > 1,$$

et

$$\tau_i \tau_j \tau_i = \tau_j \tau_i \tau_j, \qquad \text{si} \qquad |i - j| = 1.$$

Exercice 1.28. On considère la fonction

$$\gamma : S_n \to \mathbb{Z}_2 \qquad \text{avec} \qquad \gamma(\sigma) := \ell(\sigma) \pmod 2.$$

(a) Montrer que $\gamma(e) = 0$, et que $\gamma(\tau_i) = 1$ pour tout $1 \leqslant i < n$.

(b) Soit $\sigma\tau \in S_n$. Par récurrence sur $\ell(\tau)$, montrer que $\ell(\sigma\tau) = (\ell(\sigma) + \ell(\tau) \bmod 2)$.

(c) Montrer que $\gamma(\sigma\tau) = \gamma(\sigma)\gamma(\tau)$, pour tout $\sigma, \tau \in S_n$.

Exercice 1.29. (a) Décomposer en cycles disjoints les permutations dans S_3 et dans S_4.

Exercice 1.30. [**Démonstration de la Proposition 1.15**] Soit $\gamma = (a_1, \ldots, a_p) \in S_n$ un p-cycle, alors

(a) $\gamma^{-1} = (a_1, a_p, a_{p-1}, \dots a_2)$ est un p-cycle ;
(b) $\mathrm{ord}(\gamma) = p$.
(c) le signe de γ est $(-1)^{p-1}$.

Exercice 1.31. Considérons les deux permutations suivantes de S_9 : $\sigma = 492517683$ et $\tau = 719238465$.
(a) Écrire σ et τ comme produits de cycles disjoints.
(b) Trouver l'ordre de σ et de τ.
(c) Écrire σ et τ comme produits de transpositions adjacentes.

Exercice 1.32. (**Décomposition en cycles**) Soit $\sigma \in S_n$, montrer que σ s'écrit de manière unique comme produit de cycles disjoints (à l'ordre des facteurs près).

Exercice 1.33. Soit σ une permutation dans S_n et $\sigma = \gamma_1 \dots \gamma_k$ sa décomposition de σ en cycles disjoints, alors on a

$$\mathrm{ord}(\sigma) = \mathrm{ppcm}(\mathrm{ord}(c_1), \mathrm{ord}(c_2), \mathrm{ord}(c_3), \dots, \mathrm{ord}(c_k)).$$

Montrer de plus que le signe de σ est $(-1)^{n-k}$.

Exercice 1.34. Montrer qu'on peut exprimer les transpositions $\tau_i = (i, i+1)$ comme produit de transpositions de la forme $(1a)$, pour $2 \leqslant a \leqslant n$. En conclure que le groupe S_n est engendré par ces transpositions.

Exercice 1.35. Établir la table de multiplication du groupe diédral D_3. Comparer avec la table du groupe S_3 : que remarque-t-on ?

Exercice 1.36. Soit $D_m = \langle s, r \rangle$ le groupe diédral d'ordre $2m$ engendré par la rotation r d'angle $2\pi/m$, et la symétrie s verticale. Soit $t = sr$, montrer que t est une involution et que $D_m = \langle s, t \rangle$.

Exercice 1.37. Soit G un groupe tel que tout élément de G est égal à son inverse. Montrer que G est abélien.

Exercice 1.38. Soit G un groupe. Pour $x \in G$ on note

$$G_x = \{g \in G \mid gx = xg\}.$$

(a) Montrer que, pour tout $x \in G$, G_x est un sous-groupe de G.
(b) On pose $G = S_3$ le groupe symétrique à 6 éléments et on pose les éléments $e = 123$ et $\sigma = 231$. Montrer que $G_e = S_3$ et $G_\sigma = \langle \sigma \rangle$.

Exercice 1.39. Soit G un groupe fini et $A \subseteq G$ non vide. On suppose que A est stable pour la multiplication de G, c'est-à-dire : $xy \in A$ pour tout $x, y \in A$. Montrer que A est un sous-groupe de G.

Exercices exploratoires

Exercice 1.40. On définit *l'ensemble d'inversion d'une permutation* $\sigma \in S_n$ par :

$$\mathrm{inv}(\sigma) = \{(k, l) \mid 1 \leqslant k < l \leqslant n,\ \sigma(k) > \sigma(l)\}.$$

(a) Soit $1 \leqslant i \leqslant n-1$, montrer que :

$$\ell(\sigma\tau_i) = \{(i, i+1)\} \sqcup \tau_i(\mathrm{inv}(\sigma)) \iff \ell(\sigma\tau_i) > \ell(\sigma),$$

où $\tau_i(k,l) = (\tau_i(k), \tau_i(l))$ pour toute inversion $(k,l) \in \mathrm{inv}(\sigma)$.

(b) Soit $\sigma, \gamma \in S_n$, montrer $\mathrm{inv}(\sigma) = \mathrm{inv}(\gamma)$ si et seulement si $\sigma = \gamma$).

Exercice 1.41. On dit que $A \subseteq \mathbb{R}$ est **dense** dans $\mathbb{R}$ si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $\varepsilon > 0$, on a

$$A \cap \{y \in \mathbb{R} \mid |x - y| < \varepsilon\} \neq \varnothing.$$

(a) Montrer que tout sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ est ou bien dense dans $\mathbb{R}$, ou bien il existe $n \in \mathbb{R}^+$ tel que $H = n\mathbb{Z}$.

(b) Montrer que tout sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ est soit dense dans $\mathbb{R}$, soit monogène.

(c) Donner des exemples de sous-groupes non triviaux de $\mathbb{R}$, qui sont dense dans $\mathbb{R}$.

(d) Montrer les énoncés analogues pour le groupe des nombres complexes de normes 1, muni de la multiplication.

Exercice 1.42 (Groupes topologiques). Rappelons qu'une **topologie** sur un ensemble E est un sous-ensemble $\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}(E)$, dont les éléments sont appelés ouverts. On demande que

(1) $\varnothing \in \mathcal{T}$, et $E \in \mathcal{T}$;

(2) toute intersection finie d'éléments de $\mathcal{T}$ est dans $\mathcal{T}$:

$$O_1 \cap \cdots \cap O_n \in \mathcal{T}, \qquad \text{si} \qquad O_i \in \mathcal{T};$$

(3) toute réunion (pas nécessairement finie) d'éléments de $\mathcal{T}$ est dans $\mathcal{T}$:

$$\bigcup_{i \in I} O_i, \qquad \text{si} \qquad \forall (i \in I)\ O_i \in \mathcal{T}.$$

Une fonction **continue** entre deux espaces topologiques $(E_1, \mathcal{T}_1)$ et $(E_2, \mathcal{T}_2)$ est une fonction $f : E_1 \to E_2$ telle que l'image inverse de tout ouvert est un ouvert, c.-à-d. $f^{-1}(O) \in \mathcal{T}_1$ pour tout $O \in \mathcal{T}_2$. Par exemple, la topologie habituelle sur $\mathbb{R}^n$ consiste à dire que $O \subseteq \mathbb{R}^n$ est ouvert si et seulement si pour tout $x \in O$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\{y \in \mathbb{R}^n \mid \mathrm{dist}(x, y) < \varepsilon\} \subseteq O,$$

avec la distance euclidienne habituelle $\mathrm{dist}(x, y)$. On a une topologie sur $\mathcal{M}_n$ qui correspond à considérer que $\mathcal{M}_n = \mathbb{R}^{n \times n}$. Un **homéomorphisme** d'espaces topologiques est une fonction continue bijective, dont l'inverse est continu.

Un groupe **topologique** est un groupe muni d'une topologie, et dont l'opération est continue, ainsi que le passage à l'inverse, c.-à-d. pour tout $g \in G$ on a des fonctions continues $h \mapsto g \cdot h$, $h \mapsto h \cdot g$ et $h \mapsto h^{-1}$. Les groupes de Lie sont des cas particuliers de groupes topologiques. Un isomorphisme de groupes topologiques est un isomorphisme de groupes qui est aussi un homéomorphisme.

(a) Montrer que $\mathbb{R}^n$ avec l'addition vectorielle est un groupe topologique.

(b) Montrer que GL_n, $O(n)$, $SO(n)$, et SL_n sont des groupes topologiques, avec la multiplication de matrices.

(c) Montrer que si $(E, \mathcal{T})$ est un espace topologique, alors l'ensemble

$$\mathcal{H}(E,E) := \{f \mid f : E \to E,\ f \text{ homéomorphisme}\},$$

avec la composition de fonctions comme opération, est un groupe.

Exercice 1.43 (Le jeu de taquin). Le **jeu de taquin** est constitué d'un damier 4×4 sur les cases duquel sont disposées 15 tuiles carrées, avec une case vide. Les tuiles sont numérotées de 1 à 15. Un mouvement consiste à glisser une tuile voisine de l'emplacement vide, pour remplir cet emplacement. Les glissements se font verticalement ou horizontalement. La figure suivante illustre une succession de tels mouvements, avec la tuile déplacée marquée en jaune.

À partir d'une configuration donnée, le jeu consiste à se ramener à la configuration de départ ; qui est celle où les tuiles sont rangées dans l'ordre croissant quand on les parcourt selon l'ordre habituel de lecture, avec la case vacante dans le coin inférieur droit. C'est la première configuration dans la figure ci-haut. Ce jeu a apparemment été introduit dans les années 1870, et ses aspects mathématiques sont discutés dans un article de l'American Journal of pure and applied mathematics en 1879. En 1891, Sam Loyd, un concepteur de casse-tête numériques et logiques, a proposé comme défi de trouver comment ramener la configuration suivante à la configuration de départ

Chaque configuration, qui laisse le coin inférieur droit vacant, correspond à une permutation de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, 15\}$, qui consiste à lire (dans l'ordre usuel) le numéro des cases. Le groupe G, des transformations (suites de glissements) qui laissent le coin inférieur droit vacant, peut ainsi être considéré comme sous-groupe de S_{15}.

(a) Montrer que G est constitué de permutations paires.

(b) En trouvant assez de générateurs de G, montrer que $G = A_{15}$.

(c) En déduire que le problème de Sam Loyd (voir ci-haut) est impossible à résoudre.

(d) Pour chaque n, déterminer le groupe des transformations de la généralisation au damier $n \times n$ du jeu de taquin.

Pour démontrer plusieurs propriétés fondamentales de la théorie des fonctions symétriques, Schutzenberger [21] à introduit une adaptation du jeu de taquin à la combinatoire des tableaux de Young, ainsi nommé en l'honneur d'un des pionniers [22] de la théorie de la représentation des groupes.

Exercice 1.44. Soit $\mathcal{A}$ un ensemble fini quelconque, qu'on va ici appeler **alphabet**, dont les éléments sont appelé **lettres**. On dit d'une suite arbitraire $a_1a_2\cdots a_n$, avec $n \in \mathbb{N}$, de lettres dans $\mathcal{A}$, que c'est un **mot** de **longueur** n sur $\mathcal{A}$. On désigne par $\mathcal{A}^*$ l'ensemble des mots de longueur quelconque sur $\mathcal{A}$, et le mot de longueur 0 (ou **mot vide**) est dénoté par 1 ou ε. On munit $\mathcal{A}^*$ de l'opération de **concaténation**, c.-à-d.

$$(a_1a_2\cdots a_n)\cdot(b_1b_2\cdots b_k) := a_1a_2\cdots a_nb_1b_2\cdots b_k,$$

qui consiste simplement à coller ensemble les mots considérés.

(a) Montrer que la concaténation est associative, avec le mot vide comme élément neutre.

(b) Calculer le nombre de mots de longueur n sur un alphabet de longueur de k lettres.

Avec cette opération, on dit que $\mathcal{A}^*$ est le **monoïde libre** sur $\mathcal{A}$.

Exercice 1.45 (Anneaux). La donnée d'une structure **d'anneau** sur un ensemble A, est la donnée de deux opérations sur A. La première est habituellement notée additivement, et elle fait de $(A, +)$ un groupe commutatif, avec neutre noté 0 ; et la seconde est notée multiplicativement et fait de $(A, \cdot)$ un monoïde, avec neutre noté 1. On dit que l'anneau est **commutatif** si ce monoïde est commutatif. Vérifier que chacune des structures suivantes forme bien un anneau.

(a) On fixe X un ensemble non vide, et soit

$$\mathbb{R}^X = \{f \mid f : X \to \mathbb{R}\}$$

Rappelons qu'on dénote habituellement par 0, et 1 les fonctions constantes de valeur 0 et 1 respectivement ; et que les opérations usuelles sur les fonctions $f + g$, $f \cdot g$, et $(-f)$ sont caractérisées par les égalités

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &:= f(x)+g(x),\\ (f\cdot g)(x) &:= f(x)g(x),\\ (-f)(x) &:= -f(x).\end{aligned}$$

On considère sur $\mathbb{R}^X$ la structure d'anneau correspondante.

21. Marcel Paul Schutzenberger (1920-1996), est le grand-père mathématique de deux professeurs du Lacim : le centre de recherche en algèbre, combinatoire, et informatique mathématique de l'UQAM, fondé en 1990.

22. Alfred Young (1863-1942).

(b) Avec les mêmes définitions, on considère la structure d'anneau sur $\mathcal{C}(\mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

(c) Pour un anneau unitaire A, et $n \geqslant 1$, on considère la structure d'anneau sur l'ensemble $M_n(A)$ des matrices carrées $n \times n$ à coefficients dans A, avec les opérations habituelles sur les matrices. Bien entendu, la matrice nulle et la matrice identité s'obtiennent en considérant que leurs coefficients correspondent aux éléments 0 et 1 de A, de la manière usuelle.

(d) Pour A un anneau unitaire commutatif, et n variables $x_1, \ldots, x_n$, on considère l'anneau $A[x_1, \ldots, x_n]$ des polynômes en les variables $x_1, \ldots, x_n$, à coefficients dans A. Les polynômes constants (incluant 0 et 1) correspondent aux éléments de A. Les opérations se définissent de la manière habituelle.

Chapitre 2

Morphismes de groupes

Dans tout contexte mathématique, il importe de bien comprendre comment comparer les objets qui sont considérés, cela permet de mieux comprendre leur rôle. Lorsque ce contexte est algébrique, on parle de morphisme. Ce sont les fonctions entre structures algébriques de même nature qui « respectent » les opérations considérées. Dans notre cas, ce sont les fonctions qui respectent les lois de composition de groupes. Les morphismes de groupes sont de première importance pour la théorie des groupes.

2.1 Définition

Soit $(G, \cdot)$ et $(G', *)$ deux groupes. On notera $e := e_G$ l'élément neutre de G et $e' := e_{G'}$ l'élément neutre de G'.

Définition. Un **morphisme** (ou **homomorphisme**) de groupes de G vers G' est une application $\theta : G \to G'$ telle que

$$\theta(x \cdot y) = \theta(x) * \theta(y), \quad \text{pour tout} \quad x, y \in G. \tag{2.1}$$

On dit d'un morphisme de G vers lui-même que c'est un **endomorphisme** de G. On note $\mathrm{Hom}(G, G')$ l'ensemble des morphismes de G vers G', et $\mathrm{End}(G)$ l'ensemble des endomorphisme de G.

Remarque. (a) Il est clair que $\mathrm{Hom}(G, G')$ et $\mathrm{End}(G)$ sont non-vides, puisqu'on a toujours au moins le morphisme **trivial** $\theta : G \to G'$, qui envoie tous les éléments de G sur l'élément neutre de G'.

(b) De façon rigoureuse, il faudrait toujours distinguer les lois de décompositions de G et de G'. Cependant, le contexte permet généralement de bien faire la nuance, sans avoir à explicitement adopter des notations différentes. Ainsi, ci-dessus il n'y aurait pas eu d'ambiguïté à écrire $\theta(xy) = \theta(x)\theta(y)$. En effet, comme $\theta(x)$ et $\theta(y)$ sont dans G', l'opération à considérer dans le membre de droite est forcément celle de G'.

Exemples. Le signe $\varepsilon : S_n \to \{+1, -1\}$ est un morphisme de groupes[1] surjectif, de même que le déterminant dét : $\mathrm{GL}_n \to \mathbb{R}^*$ (où $\mathbb{R}^*$ est muni de la multiplication) ou bien encore l'application $f : \mathbb{Z} \to \langle x \rangle$, $k \mapsto x^k$, définie dans la Proposition 1.6.

L'un des grands intérêts de la notion de morphisme de groupes entre G et G' est de permettent de comparer ou d'étudier tout ou en partie la structure de groupe sur G en parallèle à celle sur G'. Par exemple, la proposition suivante énonce que l'image de G par un morphisme de groupes de G vers G' est un sous-groupe de G.

Proposition 2.1. *Si $\theta : G \to G'$ et $\psi : G' \to G''$ sont des morphismes de groupes, alors :*

(1) $\theta(e) = e'$;

(2) $\theta(x^{-1}) = \theta(x)^{-1}$ pour tout $x \in G$;

(3) $H \leqslant G$ implique $\theta(H) \leqslant G'$;

(4) $H' \leqslant G'$ implique $\theta^{-1}(H') \leqslant G$, où $\theta^{-1}(H') := \{x \in G \mid \theta(x) \in H'\}$;

(5) $\psi \circ \theta : G \to G''$ est un morphisme de groupes ;

(6) $\theta(\langle S \rangle) = \langle \theta(S) \rangle$, pour tout $S \subseteq G$;

(7) $\mathrm{ord}_{G'}(\theta(x)) \leqslant \min(\mathrm{ord}_G(x), |\mathrm{Im}\theta|)$ pour tout $x \in G$.

Démonstration. Pour montrer (1), on observe que

$$\theta(e)\, e' = \theta(e) = \theta(ee) = \theta(e)\theta(e),$$

et donc $\theta(e)\theta(e) = \theta(e)\, e'$. Multipliant à gauche par l'inverse de $\theta(e)$, on trouve $\theta(e) = e'$.

Pour (2), considérons $x \in G$. On a :

$$\theta(x)\, \theta(x)^{-1} = e' = \theta(e) = \theta(xx^{-1}) = \theta(x)\, \theta(x^{-1}),$$

ce qui implique $\theta(x^{-1}) = \theta(x)^{-1}$. Ensuite, prouvons (3), soit H un sous-groupe de G, et soit $y_1, y_2 \in \theta(H)$. Alors il existe $x_1, x_2 \in H$ tel que $\theta(x_1) = y_1$ et $\theta(x_2) = y_2$. Comme $x_1 x_2^{-1} \in H$ on obtient, en vertu de (2), que

$$y_1 y_2^{-1} = \theta(x_1)\theta(x_2)^{-1} = \theta(x_1)\theta(x_2^{-1}) = \theta(x_1 x_2^{-1}) \in \theta(H).$$

Puisque $e' = \theta(e) \in \theta(H)$, on conclut que $\theta(H) \leqslant G'$. La preuve de (4) est laissée en exercice. Pour (5), soit $x, y \in G$, posons $\eta := \psi \circ \theta$, et donc $\eta(x) = \psi(\theta(x))$. Montrons que $\eta(x \cdot y) = \eta(x) \cdot \eta(y)$. Puisque θ et ψ sont des morphismes de groupes on calcule que

$$\eta(x \cdot y) = \psi(\theta(x \cdot y)) = \psi(\theta(x) \cdot \theta(y)) = \psi(\theta(x)) \cdot \psi(\theta(y)) = \eta(x) \cdot \eta(y),$$

ce qui montre l'énoncé. On laisee (6) et (7) en exercice au lecteur. ∎

1. La structure de groupe sur $\{+1, -1\}$ correspond à l'opération de multiplication.

On en déduit immédiatement le résultat suivant :

Corollaire 2.2. $(\mathrm{End}(G), \circ)$ *est un monoïde. En particulier* $\mathrm{End}(G)^\times$ *est un groupe.*

2.2 Isomorphismes de groupes

À la vue du corollaire précédent, la question se pose donc quant à décrire l'ensemble des endomorphismes inversibles, c'est-à-dire, l'ensemble des endomorphismes bijectifs dont l'inverse est aussi un endomorphisme : on les appelles des **automorphismes** de G. L'ensemble des automorphismes est noté $\mathrm{Aut}(G) = \mathrm{End}(G)^\times$. En fait il se trouve que l'inverse d'un morphisme de groupes bijectif est lui-même un morphisme de groupes.

Proposition 2.3. *Soit G et G' deux groupes.*

1. *Si $\theta : G \to G'$ est un morphisme de groupes bijectif, alors $\theta^{-1} : G' \to G$ est aussi un morphisme de groupes bijectif.*
2. $\mathrm{Aut}(G)$ *est l'ensemble des endomorphismes de G bijectifs.*
3. $\mathrm{Aut}(G)$ *est un sous-groupe de S_G.*

Démonstration. Il faut seulement montrer que θ^{-1} est un morphisme de groupes. À cette fin, soit $x, y \in G'$. Comme θ est un morphisme de groupes, et $\theta \circ \theta^{-1} = \mathrm{Id} = \mathrm{Id}_{G'}$, on a

$$x \cdot y = \mathrm{Id}(x) \cdot \mathrm{Id}(y) = \theta(\theta^{-1}(x)) \cdot \theta(\theta^{-1}(y)) = \theta(\theta^{-1}(x) \cdot \theta^{-1}(y)).$$

Appliquant θ^{-1} à chaque membre de cette égalité, on trouve

$$\theta^{-1}(x \cdot y) = \theta^{-1}(x) \cdot \theta^{-1}(y).$$

Les énoncés (2) et (3) sont des conséquences immédiates de ce qui précède. ∎

Cette proposition justife la définition suivante.

Définition. On dit qu'un morphisme bijectif $\theta : G \to G'$ est un **isomorphisme**. On notera alors $\theta : G \xrightarrow{\sim} G'$. On note $\mathrm{Isom}(G, G')$ l'ensemble des isomorphismes de G dans G'. S'il existe un isomorphisme entre deux groupes, on dit qu'ils sont **isomorphes** [2]. On dit alors aussi que G et G' sont dans la même **classe d'isomorphisme** et on note ce fait $G \simeq G'$.

Deux groupes isomorphes ont les mêmes propriétés algébriques du point de vue de la théorie des groupes. En particulier :

2. Du grec « $\iota\sigma\omicron\varsigma$ » (isos) pour « même », et « $\mu o \rho \varphi \eta$ » (morphè) pour « forme ».

— G est abélien si et seulement si G' est abélien (à vérifier en exercice) ;
— pour tout $x \in G$, et tout isomorphisme θ, on a que $\mathrm{ord}(\theta(x)) = \mathrm{ord}(x)$;
— si $G \simeq G'$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre d'éléments de G d'ordre n est égal au nombre d'éléments de G' d'ordre n. De plus, deux groupes isomorphes ont forcément le même ordre.

La notion de classe d'isomorphisme simplifie de ce fait beaucoup l'étude des groupes, car maintenant il suffit donc de connaitre un groupe dans chaque classe d'isomorphisme afin de comprendre tous les groupes de cette classe.

Remarque. La relation $\simeq$ est une relation d'équivalence (sur l'ensemble des groupes contenus dans un « univers » donné), voir l'exercice 2.4. On remarquera aussi que $\mathrm{Isom}(G, G')$ peut être vide, car si il ne l'est pas alors les deux groupes doivent avoir le même cardinal.

Exemples. (a) L'application $\theta : \mathbb{Z}_2 \to \{+1, -1\}$ définie en posant $\theta(0) := 1$ et $\theta(1) := -1$ est un isomorphisme de groupes. En effet, on a

$$\begin{array}{lllllllll} \theta(0+1) & = & \theta(1) & = & -1 & = & 1 \cdot (-1) & = & \theta(0)\theta(1), \\ \theta(0+0) & = & \theta(0) & = & 1 & = & 1 \cdot 1 & = & \theta(0)\theta(0), \\ \theta(1+1) & = & \theta(0) & = & 1 & = & (-1) \cdot (-1) & = & \theta(1)\theta(1). \end{array}$$

Autrement dit, « additionner » dans $\mathbb{Z}_2$ revient au même que de « multiplier » dans $\{+1, -1\}$.

(b) Les groupes S_3 et $\mathbb{Z}_6$ ont le même ordre, mais ne sont pas isomorphes. En effet, $\mathbb{Z}_6$ possède 2 éléments d'ordre 6, tandis que S_3 n'en possède pas. Une autre différence significative est que $\mathbb{Z}_6$ est abélien, tandis que S_3 ne l'est pas.

(c) De manière plus imagée, la Figure 2.1 illustre comment le groupe des symétries du triangle équilatéral, le groupe diédral D_3, est isomorphe au groupe S_3 (voir l'exercice 2.11).

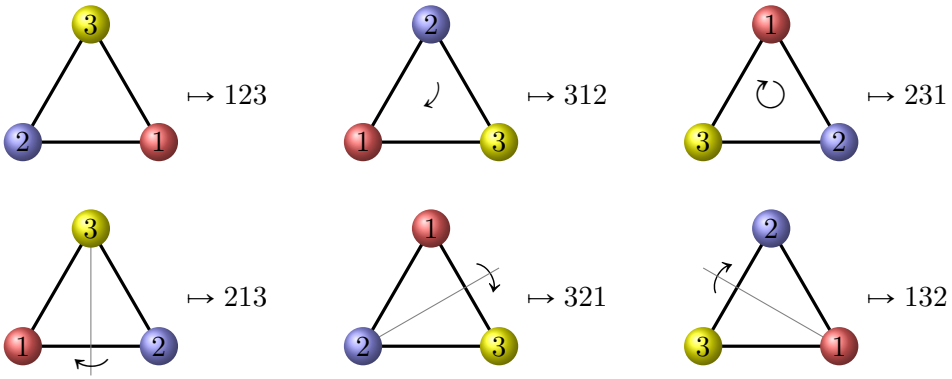


FIGURE 2.1 – Isomorphisme entre les symétries du triangle et S_3.

2.3 Classifier les groupes finis ?

Le problème de trouver une classification des groupes finis peut maintenant prendre un sens précis.

Problème (Classification des groupes finis). Donner, à isomorphisme près, la liste de tous les groupes d'un ordre donné.

Pour $n \leqslant 16$, on en trouve une liste complète sur le site suivant : Liste des petits groupes. La suite donnant le nombre de groupes d'ordre n se trouve dans « On-line Encyclopedia of Integer Sequences ». Les premiers termes sont :

$$0, 1, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 5, 2, 2, 1, 5, 1, 2, 1, 14, 1, 5, 1, 5, 2, 2, 1, 15, 2, 2, 5, 4, 1, 4, 1, 51, 1, \ldots$$

Les valeurs qui « ressortent » dans cette suite correspondent aux nombres de groupes d'ordre 2^n. La suite des nombres de groupes en question (voir https ://oeis.org/A000679) est

$$1, 1, 2, 5, 14, 51, 267, 2328, 56092, 10494213, 49487365422, \ldots$$

Nous verrons au Chapitre 6 comment on peut construire tous les groupes abéliens fins.

Le problème de la classification des groupes finis n'est pas, à date, résolu. Ce problème ce décompose en fait en deux problèmes distincts.

Le premier est de donner une classification des groupes finis simples [3] On a depuis les années 1980 une classification complète des groupes simples finis, que l'on peut trouver ici : Liste des groupe finis simples. En principe, cela permet de construire tous les groupes finis. Parmi ceux-ci, on a des familles infinies :

- La famille les groupes $\mathbb{Z}_p$ pour p premier, qui n'ont aucun sous-groupe non trivial.
- La famille des groupes alternés A_n, avec $n \geqslant 5$. Le fait que ces groupes soit simples entre dans l'explication de Galois du fait qu'il n'y a pas de formule par radicaux pour les racines de polynômes de degré supérieur ou égal à 5.
- Avec 16 familles de groupes de Lie.

Puis on a 26 groupes dits « exceptionnels », qui ne font pas partie de ces familles infinies. Le plus petit est le groupe de Mathieu M_{11}, d'ordre 7920, et le plus grand est le Monstre (voir Section 1.5). Bien entendu, du fait cette classification, il y a un groupe simple d'ordre p pour tout nombre premier p ; et il y a un groupe d'ordre $n!/2$ pour tout entier $n \geqslant 5$. Pour les autres entiers k, il plus rare d'avoir un groupe simple d'ordre k. Excluant les nombres premiers et les nombres de la forme $n!/2$, la liste des entiers k pour lesquels il existe un groupe simple d'ordre k débute comme suit :

$$168, 504, 660, 1092, 2448, 3420, 4080, 5616, 6048, 6072, 7800, \mathbf{7920}, 9828, 12180, 14880, 25308, \ldots$$

3. On en donnera la définition à la fin du chapitre.

Le second est *le problème de l'extension des groupes finis*, qui est toujours un problème ouvert à l'heure actuelle.

Problème. Soit H, K deux groupes, donner, à isomorphisme près, la liste de tous les groupes G qui sont solution de la **suite exacte courte** suivante :

$$e \hookrightarrow H \hookrightarrow G \twoheadrightarrow K \twoheadrightarrow e$$

(voir Exercice 2.31 pour plus de détails sur les suites exactes courtes).

2.4 Noyau et image d'un morphisme de groupes

Maintenant que nous nous sommes convaincus de l'importance de la notion d'isomorphisme, c'est-à-dire de morphismes de groupes bijectifs, nous allons discuter plus précisément la structure de bijection en rapport avec celle de groupes.

On rappelle qu'une application est bijective si et seulement si elle est surjective et injective. Un morphisme de groupes surjectif est appelé un **épimorphisme**, et on utilise la notation [4]

$$\theta : G \twoheadrightarrow G' .$$

On dit d'un morphisme injectif, que c'est un **monomorphisme**, et on écrit

$$\theta : G \hookrightarrow G' .$$

Exemples. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $\pi : \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_n$ définie par $\pi(k) = (k \bmod n)$ est un épimorphisme. Comme un le verra plus tard, c'est un cas spécial de « surjection canonique ».

(b) Si H est un sous-groupe de G, alors l'inclusion $\iota : H \to G$, telle que $\iota(g) = g$, est un morphisme de groupes injectif appelé « injection canonique ».

(c) Si $\theta : G \to G'$ un monomorphisme alors les groupes G et $\mathrm{Im}(\theta)$ sont isomorphes.

Définition. Le **noyau** d'un morphisme $\theta : G \to G'$, noté $\ker(\theta)$, est le sous-groupe de G formé de l'image inverse de e' par θ, c.-à-d.

$$\ker(\theta) := \theta^{-1}(e') = \{g \in G \mid \theta(g) = e'\}.$$

La terminologie viens du terme allemand « kern », qui signifie noyau. C'est une notion naturelle qui apparaît dans de nombreux contextes algébriques (voir Exercice 2.36). D'autre part, on considère aussi **l'image** d'un morphisme θ

$$\mathrm{Im}(\theta) := \theta(G) = \{\theta(x) \mid x \in G\}.$$

4. Avec une flèche spéciale qui indique la surjectivité

Il découle de la Proposition 2.1, que $\mathrm{Im}(\theta)$ est aussi un sous-groupe de G'. Comme l'indique la proposition suivante, la nature du noyau et de l'image d'un morphisme détermine certaines propriétés fondamentales du morphisme.

Proposition 2.4. *Si $\theta : G \to G'$ est un morphisme de groupes, alors*

(1) *le noyau $\ker(\theta)$ est un sous-groupe de G ;*

(2) *θ est injectif si et seulement si $\ker(\theta) = \{e\}$; et*

(3) *θ est surjectif si et seulement si $\mathrm{Im}(\theta) = G'$.*

En particulier, θ est un isomorphisme si et seulement si $\mathrm{Im}(\theta) = G$ et $\ker(\theta) = \{e\}$.

Démonstration. Supposons maintenant que θ injectif. Soit $x \in \ker(\theta)$, alors $\theta(x) = e' = \theta(e)$. Comme θ est injectif, $x = e$. Supposons maintenant que $\ker(\theta) = \{e\}$. Soit $x_1, x_2 \in G$ tel que $\theta(x_1) = \theta(x_2)$, alors $e_{G'} = \theta(x_1) \cdot \theta(x_2)^{-1} = \theta(x_1 \cdot x_2^{-1})$. Donc $x_1 \cdot x_2^{-1} \in \ker(\theta) = \{e\}$, d'où $x_1 = x_2$. ■

Exemple (Le groupe alterné). On obtient le **groupe alterné**, noté A_n, comme sous-groupe de S_n, en considérant le morphisme de groupes qui associe à une permutation son signe, $\varepsilon : S_n \to \{+1, -1\}$. On a donc

$$A_n := \ker(\varepsilon) = \{\sigma \in S_n \mid \varepsilon(\sigma) = 1\}.$$

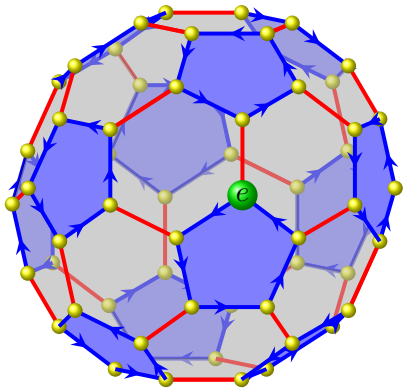


FIGURE 2.2 – Graphe de Cayley de A_5, pour les générateurs (12345) et (12)(34).

On dit aussi des éléments de A_n que ce sont des permutations **paires**. Par exemple, A_5 admet comme générateurs les permutations paires (12345) et (12)(34) ; et le graphe de Cayley correspondant est celui de la Figure ci-contre. Les flèches bleues correspondent à la composition avec le cycle (12345), et les arêtes rouges correspondent à la composition avec la permutation (12)(34), qui est d'ordre 2. Ces dernières arêtes ne sont pas orientées ; elles vont dans les deux sens. Le composé des deux générateurs donne une permutation d'ordre 3, qui correspond à suivre en alternance les arêtes rouges et les arêtes bleues autour des faces hexagonales de la figure. Les pentagones sont les classes à gauche du sous-groupe engendré par (12345). Ignorant l'orientation des arêtes, on constate que le graphe est celui qui décrit la molécule de C_{60} du chapitre 1. On montre, voir l'exercice 2.2, que les éléments de A_5 sont d'ordre 1, 2, 3, ou 5.

2.5 Automorphismes intérieurs

La question, pour un groupe G de fixé son groupe $\mathrm{Aut}(G)$ de ses automorphismes est une question difficile en théorie des groupes. Nous allons ici définir une sous-classe d'automorphismes plus simple à

étudier et qui est liée à la conjugaison dans les groupes.

Pour tout groupe G, et $g \in G$, la fonction de conjugaison par g

$$\varphi_g : G \longrightarrow G \qquad \text{définie par} \qquad \varphi_g(x) := gxg^{-1},$$

est un automorphisme de G qu'on dit être **intérieur**. On note $\mathrm{Int}(G)$ le groupe des automorphismes intérieurs de G. Pour voir que φ_g est un automorphisme on calcule d'abord, pour $x, y \in G$ que

$$\begin{aligned} \varphi_g(x)\varphi_g(y) &= (gxg^{-1})\,(gyg^{-1}) \\ &= gx\,(g^{-1}g)\,yg^{-1} \\ &= gx\,e\,yg^{-1} \\ &= g\,xy\,g^{-1} \\ &= \varphi_g(xy). \end{aligned}$$

De plus, φ_g inverse admet comme inverse $\varphi_{g^{-1}}$. En effet,

$$\begin{aligned} \varphi_{g^{-1}} \circ \varphi_g(x) &= \varphi_{g^{-1}}(gxg^{-1}) \\ &= g^{-1}(gxg^{-1})(g^{-1})^{-1} \\ &= g^{-1}(gxg^{-1})g \\ &= x. \end{aligned}$$

Donc $\varphi_{g^{-1}} \circ \varphi_g = \mathrm{Id}_G$. De même, on vérifie que $\varphi_{g^{-1}}$ est inverse à droite de φ_g. On observe que $\mathrm{Int}(G)$ peut être bien plus petit que G. Par exemple, si G est abélien, alors $\mathrm{Int}(G) = \{e\}$.

Proposition 2.5. *Soit G un groupe. Alors* $\mathrm{Int}(G) \leqslant \mathrm{Aut}(G)$.

Démonstration. Exercice. ∎

2.6 Théorème de Cayley

Nous allons voir dans cette section que le groupe symétrique joue un rôle central en théorie des groupes. Dans le cas fini, la proposition suivante montre qu'on peut toujours se ramener aux groupes S_n. Une façon d'interpréter le théorème principal de la section est alors de dire que tous les groupes finis se retrouvent (à isomorphisme près) à l'intérieur d'un groupe symétrique S_n, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Autrement dit, bien connaître S_n peut permettre d'aider à comprendre tous les groupes finis.

Proposition 2.6. *Soit E un ensemble non vide.*

(1) *Si E et F ont même cardinal, alors $S_E \simeq S_F$;*

(2) *Si* $|E| = n$, *alors* $S_E \simeq S_n$.

Démonstration. Si E et F ont même cardinal, alors il existe une bijection $f : E \to F$. Il suffit de montrer que la fonction

$$\alpha : S_E \to S_F, \qquad \text{avec} \qquad \alpha(g) := f \circ g \circ f^{-1},$$

est un isomorphisme de groupes. Procédant presque exactement comme à la section précédente, on vérifie facilement que l'inverse de α est $\alpha^{-1} := S_F \to S_E$, avec $\alpha^{-1}(h) := f^{-1} \circ h \circ f$. Ne reste plus qu'à montrer que α est un morphisme de groupe. À cette fin, soit $g, g' \in S_E$, alors

$$\begin{aligned} \alpha(g \circ g') &= f \circ g \circ g' \circ f^{-1} \\ &= f \circ g \circ \mathrm{Id}_E \circ g' \circ f^{-1} \\ &= f \circ g \circ \mathrm{Id}_E \circ g' \circ f^{-1} \\ &= (f \circ g \circ f^{-1}) \circ (f \circ g' \circ f^{-1}) \\ &= \alpha(g) \circ \alpha(g'). \end{aligned}$$

La proposition est donc démontrée. ■

Le théorème qui suit est conceptuellement d'une grande importance. Il est dû au mathématicien anglais Arthur Cayley (1821-1895), un des pionniers de la théorie des groupes.

Théorème 2.7 (Théorème de Cayley)**.** *Tout groupe G est isomorphe à un sous-groupe de S_G, le groupe de ses permutations.*

Démonstration. Il suffit de construire un morphisme de groupes injectif $\Phi : G \to S_G$. Pour chaque $g \in G$, on considère la fonction $\Phi_g : G \to G$, définie en posant $\Phi_g(x) := g \cdot x$. C'est une bijection, appelée **translation à gauche** par g (exercice). En outre, $\Phi_g \in S_G$ et son inverse est $(\Phi_g)^{-1} = \Phi_{g^{-1}}$. Donc la fonction $\Phi : G \to S_G$, avec $\Phi(g) := \Phi_g$, est bien définie. En calculant comme suit, on vérifie que Φ est un morphisme de groupes. En effet, pour $g, h \in G$, on a (exercice)

$$\begin{aligned} \Phi(g) \circ \Phi(h) &= \Phi_g \circ \Phi_h \\ &= \Phi_{gh} \\ &= \Phi(gh). \end{aligned}$$

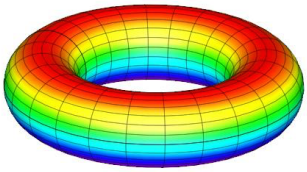
D'autres parts, Φ est injectif. En effet, si $g \in \ker(\Phi)$ alors $\Phi_g = \mathrm{Id}$. Donc $\Phi_g(x) = gx = x$ pour tout $x \in G$, et donc $g = e$. On conclut donc que Φ est un monomorphisme de groupe, de G vers S_G. ■

Exemple. Comme $|\mathbb{Z}_3| = 3$, la conjonction de la Proposition 2.6 et du Théorème de Cayley permet de conclure que $\mathbb{Z}_3$ est isomorphe à un sous-groupe de S_3. Il suffit de prendre celui engendré par $\sigma_1 = 231 = (123)$. C'est en fait le seul sous-groupe d'ordre 3 dans S_3.

Remarque. Le théorème de Cayley est d'une grande importance théorique, car il montre que l'on peut utiliser les technologies développées pour les groupes symétriques afin d'étudier tous les groupes. Par contre, en ce qui concerne la pratique, il est parfois très difficile d'utiliser ce théorème pour étudier des groupes finis à très grands cardinaux, car le groupe symétrique sera lui encore bien plus grand. Par exemple, $\mathbb{Z}_9$ est, à isomorphisme près, un sous-groupe de S_9 de cardinal 9!.

Afin de pallier à ce problème pratique, nous allons développer dans le CHapitre 3 la notion d'action de groupes qui nous permettra de réduire l'ordre du groupe symétrique considéré pour étudier un groupe donné.

2.7 Produits de groupes



La notion d'isomorphisme nous permet maintenant de discuter la notion de produits de groupes. Ces notions sont motivées par le problème suivant : déterminer si un groupe donné peut se décomposer à isomorphisme près en « en produits » de groupes.

Afin d'y répondre, nous allons commencer par montrer que le produit direct d'ensembles qui sont des groupes est muni d'une structure naturelle de groupe, ce qui permet de construire de nouveaux groupes à partir de groupes donnés. Puis nous discuterons de conditions afin de déterminer si un groupe peut se décomposer en produit de groupes.

2.7.1 Le produit direct

Pour deux groupes G, H, on considère sur le produit cartésien

$$G \times H = \{(g, h) \mid g \in G, h \in H\}.$$

l'opération de groupe obtenue en posant :

$$(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) = (g_1 g_2, h_1 h_2).$$

L'élément neutre est (e_G, e_H), et l'inverse se calcule comme suit :

$$(g, h)^{-1} = (g^{-1}, h^{-1}).$$

En effet, on vérifie que :

$$\begin{aligned}(g,h)\cdot(e,e) &= (ge,he)=(g,h)\\ (e,e)(g,h) &= (eg,eh)=(g,h)\\ (g,h)\cdot(g^{-1},h^{-1}) &= (gg^{-1},hh^{-1})=(e,e)\\ (g^{-1},h^{-1})\cdot(g,h) &= (g^{-1}g,h^{-1}h)=(e,e).\end{aligned}$$

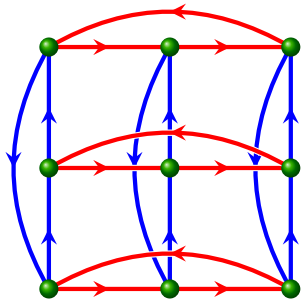


FIGURE 2.3 – Graphe de Cayley de $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$.

L'associativité se vérifie aussi de même façon. C'est le **produit direct** (ou **produit direct externe**) de G avec H. On obtient ainsi, par exemple, le groupe $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$; ou encore le groupe $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_k$, d'ordre $n\,k$. On observe que le **groupe de Klein** $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ (d'ordre 4) n'est pas isomorphe à $\mathbb{Z}_4$. En effet, dans $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ on a tous les éléments d'ordre au plus 2, ce qui n'est pas le cas dans $\mathbb{Z}_4$. Par contre, $\mathbb{Z}_6$ est isomorphe à $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3$. Plus généralement, comme on va le voir plus tard , $\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_k$ n'est isomorphe à $\mathbb{Z}_{nk}$, que si n et k sont premiers entre eux, c.-à-d. $\text{pgcd}(n,k)=1$.

La construction du produit direct se généralise aisément à plusieurs facteurs. Ainsi, pour n groupes $G_1,\ldots,G_n$, on a le produit direct de groupes $G_1\times\cdots\times G_n$ avec l'opération

$$(x_1,\ldots,x_n)\cdot(y_1,\ldots,y_n) := (x_1y_1,x_2y_2,\ldots,x_ny_n) \tag{2.2}$$

On écrit aussi parfois $\prod_{i=1}^n G_i$, pour ce produit.

Proposition 2.8. *Le produit cartésien $\Pi_{i=1}^n G_i$ des groupes $G_1,\ldots,G_n$ munit de la loi de composition de l'équation 2.2 est un groupe dont l'élement neutre est $(e_{G_1},\ldots,e_{G_n})$ et l'inverse de $(g_1,\ldots,g_n)\in\prod_{i=1}^n G_i$ est $(g_1^{-1},\ldots,g_n^{-1})$. De plus, si les groupes $G_1,\ldots,G_n$ sont finis, alors $|\prod_{i=1}^n G_i| = \Pi_{i=1}^n |G_i|$.*

Démonstration. La proposition se déduit aisément du cas de deux groupes traité ci-dessus avec l'aide d'une récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$. ∎

La proposition suivante est très utile afin d'obtenir facilement des morphismes de groupes dans le cas d'un groupe qui est produit cartésien de groupes.

Proposition 2.9. *Si $\theta_i : G_i \longrightarrow G_i'$, pour $1\leqslant i\leqslant n$, sont des morphismes de groupes, alors on a un morphisme de groupe*

$$\theta_1\times\cdots\times\theta_n : G_1\times\cdots\times G_n \longrightarrow G_1'\times\cdots\times G_n'$$

définie en posant

$$(\theta_1\times\cdots\times\theta_n)(x_1,\ldots,x_n) = (\theta_1(x_1),\ldots,\theta_n(x_n)),$$

pour $(x_1, \dots, x_n)$ dans $G_1 \times \cdots \times G_n$. Si les θ_i sont des monomorphismes (resp. épimorphisme, ou isomorphisme), alors $\theta_1 \times \cdots \times \theta_n$ est un monomorphisme (resp. épimorphisme, ou isomorphisme). Dans le cas où les θ_i sont des isomorphismes, l'inverse de $(\theta_1 \times \cdots \times \theta_n)$ est $(\theta_1^{-1} \times \cdots \times \theta_n^{-1})$, et c'est donc un isomorphisme.

Démonstration. Exercice. ∎

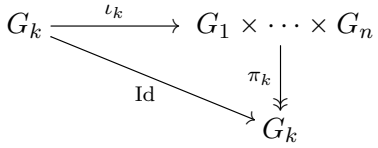
Injection et projection canonique, propriété universelle. Pour chaque k, entre 1 et n, on a un monomorphisme de groupes $\iota_k : G_k \to G_1 \times \cdots \times G_n$, défini en posant

$$\iota_k(x) := (\underbrace{e, \dots, e}_{k-1}, x, e, \dots, e),$$

et un épimorphisme de groupes $\pi_k : G_1 \times \cdots \times G_n \to G_k$, simplement définis en posant

$$\pi_k(x_1, \dots, x_n) := x_k.$$

On dit de ι_k que c'est **l'inclusion canonique** de G_k dans le produit, et de π_k que c'est la k^{e} **projection canonique** sur la composante G_k. On vérifie aisément que $\pi_k \circ \iota_k = \mathrm{Id}$, ou formulé en terme diagramme commutatif :

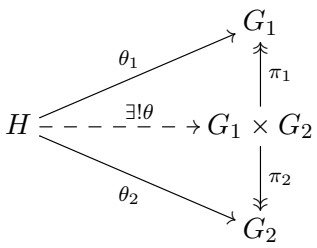


La **propriété universelle** qui caractérise le produit direct de groupes fait l'objet de la proposition suivante. Elle permet en particulier d'étendre facilement des morphismes de groupes au produit directe des groupes images.

Proposition 2.10. *Pour tout groupe H, et des morphismes $\theta_1 : H \to G_1$ et $\theta_2 : H \to G_2$, il existe un unique morphisme $\theta : H \to G_1 \times G_2$, tel que*

$$\pi_1 \circ \theta = \theta_1, \qquad \text{et} \qquad \pi_2 \circ \theta = \theta_2.$$

On a alors $\theta(h) = (\theta_1(h), \theta_2(h))$, pour tout $h \in H$ et on écrit $\theta = (\theta_1, \theta_2)$. Formulé en terme de diagramme commutatif, ceci prend la forme



Démonstration. Exercice. ∎

2.7.2 Le produit direct interne

Nous allons donné ici un critère qui, si vérifié, permet de montrer qu'un groupe est isomorphe à un produit interne de groupes : c'est la notion de produit directe, dont le définition passe par la proposition suivante.

Proposition 2.11. *Dans un groupe G, si H et K sont des sous-groupes de G tels que*

$$xy = yx,\ \forall (x,y) \in H \times K, \qquad H \cap K = \{e\} \qquad \text{et} \qquad G = HK,$$

alors $G \simeq H \times K$.

Démonstration. Considérons la fonction $\varphi : H \times K \to G$, avec $\varphi(x,y) := xy$. La condition $G = HK$ dit précisément que cette fonction est surjective. En fait φ est un epimorphisme de groupes puisqu'on a les deux égalités

$$\begin{aligned} \varphi((x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2)) &= \varphi(x_1x_2, y_1y_2) = x_1x_2\, y_1y_2 \\ \varphi(x_1,y_1)\cdot\varphi(x_2,y_2) &= (x_1y_1)\cdot(x_2y_2) = x_1y_1x_2y_2, \end{aligned}$$

et ces deux expressions sont égales car les éléments de H et K commutent. De plus φ est injectif, car $\varphi(x,y) = e$ implique $xy = e$, alors $y = y^{-1} \in H \cap K$; d'où $x = e$, $y^{-1} = e$, et donc $y = e$. D'où $(x,y) = (e,e)$. On conclut donc que φ est un isomorphisme. ∎

Définition. On dit que G est **produit direct interne** des sous-groupes H et K si H et K satisfont les conditions de la proposition H, K. Lorsque ceci est le cas, on dit que G se **décompose** comme produit direct de ses sous-groupes H et K. On dit aussi que H et K sont les **facteurs** de cette décomposition.

Exemple. Le groupe $G = \mathbb{Z}_6$ est produit direct interne de ses sous-groupes $H = \langle 3\rangle$ et $K = \langle 2\rangle$. En effet $H = \{0,3\}$, $K = \{0,2,4\}$ et G est abélien donc les hypothèses de la Proposition 2.11 sont vérifiés aisément.

Corollaire 2.12. *Soit G un groupe et $H, K \leqslant G$ tel que $hk = kh$ pour tout $(h,k) \in H \times K$.*

1. *HK est un sous-groupe de G.*
2. *Si de plus $H \cap K = \{e\}$, alors $HK \simeq H \times K$,*

Démonstration. Il suffit, au vu de la proposition précédente, de montrer que HK est un sous-groupe de G. On a $e = e.e \in HK$. De plus, si $h_1k_1, h_2k_2 \in HK$ alors par hypothèse on a :

$$h_1k_1(h_2k_2)^{-1} = h_1(k_1k_2^{-1})h_2^{-1} = h_1h_2^{-1}(k_1k_2^{-1}) \in HK.$$

∎

2.7.3 Produit semi-direct interne

Malheureusement, le produit direct ne suffit pas toujours à décomposer un groupe en produit de groupes « plus simples ». Il est alors naturel d'affaiblir les conditions de la proposition 2.11. Pour cela, on va considérer une classe de sous-groupes H d'un groupe G dont l'ensemble des automorphismes contient $\mathrm{Int}(G)$.

Définition. Un sous-groupe H d'un groupe G est dit **normal** (ou **distingué**) si $\mathrm{Int}(G) \subseteq \mathrm{Aut}(H)$. Autrement dit, si $xH = Hx$ pour tout $x \in G$. On écrit alors $H \lhd G$.

Un groupe est dit **groupe simple** [5] si ses seuls sous-groupes normaux sont lui-même ou $\{e_G\}$.

Exemple. (a) Le centre du groupe $Z(G)$ est normal dans G. En effet, si $x \in G$, alors $xg = gx$ pour tout $g \in Z(G)$. Donc $xZ(G) = Z(G)x$.

(b) Le groupe $\mathrm{Int}(G)$, des automorphismes internes de G, est un sous-groupe normal de son groupe d'automorphisme $\mathrm{Aut}(G)$.

Proposition 2.13. *1. Tout sous-groupe d'un groupe abélien G est normal.*

2. L'intersection de sous-groupes normaux est un sous-groupe normal.

3. Si $G = \langle S \rangle$ est un groupe et $H = \langle T \rangle$ est un sous-groupe de G, avec $S, T \subseteq G$, alors $H \lhd G$ si et seulement si $sts^{-1} \in H$ pour tout $s \in S$ et $t \in T$.

Démonstration. Exercice 2.21. ∎

Proposition 2.14. *Le noyau $\ker(\theta)$ d'un morphisme de groupes $\theta : G \to G'$ est un sous-groupe normal de G. En particulier, si G est un groupe simple, alors les morphismes de groupes non-trivaux $\theta : G \to H$ sont forcément des monomorphismes.*

Démonstration. Si g est dans $\ker(\theta)$, alors

$$\theta(x^{-1}gx) = \theta(x)^{-1}\, e'\, \theta(x) = e',$$

et donc $x^{-1}gx$ est dans le noyau, pour tout x dans G. Ceci montre que $\ker(\theta)$ est normal.

Supposons G simple, alors si θ n'est pas trivial, son noyau n'est pas égal à G. Comme G est simple, la seule autre possibilité est que $\ker(\theta) = \{e\}$, et donc θ est un monomorphisme. ∎

Définition. Soit G un groupe, $H \leqslant G$ un sous-groupe de G et $N \lhd G$ un sous-groupe normal de G. On munit l'ensemble $N \times H$ de la loi de composition suivante interne suivante :

$$(x, h)(y, g) = (xhyh^{-1}, hg).$$

5. Cette notion est fondamentale dans l'étude du problème de classification des groupes finis, voir §2.3

On appelle alors l'ensemble $N \times H$ munit de cette loi de composition, noté[6] $N \rtimes H$, le **produit semi-direct interne de N par H dans G.**

Proposition 2.15. *Soit G un groupe, $H \leqslant G$ et $N \lhd G$.*

1. *Le produit semi-direct interne $N \rtimes H$ de N par H est un groupe.*
2. *Supposons que $N \cap H = \{e\}$ et $G = NH$, alors $G \simeq N \rtimes H$.*

Démonstration. Exercice. ∎

Exemple. Le lecteur vérifiera en exercice que le groupe diedral S_3 est isomorphe au produit semi-direct $\langle(123)\rangle \rtimes \langle(12)\rangle$.

2.7.4 Produits semi-directs

Il existe aussi une version « externe » du produit semi-direct qui elle-même mène à plusieurs domaines de recherche contemporains (algèbre homologique, topologie combinatoire, cohomologie de groupes, extensions de groupes, etc.) dépassant tous le niveau d'un premier cours sur la théorie des groupes.

Proposition 2.16. *Soient G et F deux groupes et soit $\varphi \in \mathrm{Hom}(G, \mathrm{Aut}(F))$ un morphisme de groupes de G dans le groupe des automorphismes sur F. On notera φ_g l'image de $g \in G$ par φ. On munit l'ensemble $F \times G$ de la loi de composition interne :*

$$(h, g)(h', g') = (h\varphi_g(h'), gg').$$

Alors $F \times G$ munit de cette loi est un groupe que l'on note $F \rtimes_\varphi G$ et l'on appelle **produit semi-direct de F par G (relativement à φ)**.

En particulier, si φ est l'application trivial (qui envoie G sur $\{\mathrm{Id}_F\}$, alors $F \rtimes_\varphi G = F \times G$.

Démonstration. Voir exercice 2.32. ∎

Exemple. Le groupe diédral D_n est isomorphe au produit semidirect $\mathbb{Z}_n \rtimes_\varphi C_2$, avec $\varphi : C_2 \to \mathbb{Z}_n$ le morphisme $\varphi_i(k) := i\,k$; considérant que $C_2 = \{\pm 1\}$ est muni de la multiplication. Autrement dit, $\varphi_1(k) = k$, et $\varphi_{-1}(k) = -k$. Comme $\mathbb{Z}_n$ est abélien, on a bien $\varphi_{-1}(k_1\,k_2) = \varphi_{-1}(k_1)\varphi_{-1}(k_2)$. Plus explicitement, la loi de composition de $\mathbb{Z}_n \rtimes_\varphi C_2$ est comme suit :

$$\begin{aligned}
(k, 1) \cdot (\ell, 1) &= ((k + \ell \bmod n), 1),\\
(k, 1) \cdot (\ell, -1) &= ((k - \ell \bmod n), -1),\\
(k, -1) \cdot (\ell, 1) &= ((k + \ell \bmod n), -1),\\
(k, -1) \cdot (\ell, -1) &= ((k - \ell \bmod n), 1).
\end{aligned}$$

6. L'ordre de N et H est important, puisqu'il indique quel est le sous-groupe (le premier) qui est forcément normal.

Voir l'exercice 2.32 pour plus de détails.

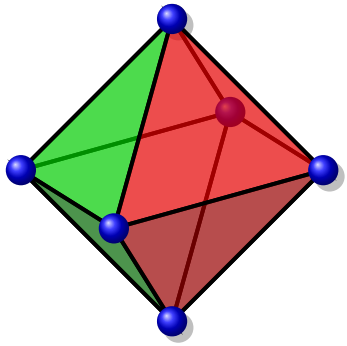


FIGURE 2.4 – L'octaèdre.

Exemple. (Le groupe hyperoctaédral B_n.) Un exemple classique de produit semi-direct est le groupe B_n des matrices $n \times n$ qui contiennent une et une seule valeur non nulle sur chaque colonne et sur chaque ligne, avec cette valeur égale soit à $+1$ soit à -1. Ainsi, il y a 48 telles matrices pour $n = 3$, par exemple celle-ci

$$g = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ce groupe est isomorphe au produit semi-direct $(\mathbb{Z}^2)^n \rtimes_\varphi S_n$, où l'automorphisme $\varphi \in \mathrm{Hom}(S_n, \mathrm{Aut}((\mathbb{Z}_2)^n))$ est défini par :

$$\varphi_\sigma(k_1, k_2, \ldots, k_n) := (k_{\sigma^{-1}(1)}, k_{\sigma^{-1}(2)}, \ldots, k_{\sigma^{-1}(n)}).$$

Ici, on considère que $\mathbb{Z}_2$ est isomorphe à $C_2 = \{+1, -1\}$ avec la multiplication comme opération. Ainsi, les 48 éléments de $(\mathbb{Z}_2)^3 \rtimes_\varphi S_3$ sont des couples comme $((-1, 1, -1), 213)$. La bijection, entre ces couples et les matrices décrites plus haut, associe au couple $(\mathbf{k}, \sigma)$ la matrice $(a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, telle que

$$a_{ij} := \begin{cases} k_j & \text{si } \sigma(j) = i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le groupe hyperoctaédral correspond aux symétries de l'hyperoctaèdre. Rappelons que **l'hyperoctaèdre** HO_n est l'enveloppe convexe des $2\,n$ points de la forme $(0, \ldots, 0, \pm 1, 0 \ldots, 0)$, dans $\mathbb{R}^n$. Le groupe B_n agit sur ces points, en permutant les coordonnées et changeant le signe. Ainsi, les sommets de l'octaèdre sont les six points

$$A = (1, 0, 0), \quad A^- = (-1, 0, 0), \quad B = (0, 1, 0), \quad B^- = (0, -1, 0), \quad C = (0, 0, 1), \text{ et } C^- = (0, 0, -1).$$

Les sommets portant le même nom (au signe près) sont opposés dans l'octaèdre. Avec l'élément g de B_3 ci-haut, on calcule que

$$g \cdot A = B, \quad g \cdot A^- = B^-, \quad g \cdot B = A^-, \quad g \cdot B^- = A, \quad g \cdot C = C, \text{ et } g \cdot C^- = C^-.$$

On constate donc que les sommets opposés sont envoyés dans des sommets opposés. Bien entendu, c'est toujours le cas pour l'action de B_n sur HO_n.

2.8 Exercices

Exercice 2.1. Montrer que les applications suivantes sont des morphismes de groupes dont on déterminera le noyau, l'image et on spécifiera, en le justifiant, lesquelles sont injectives, surjectives ou bijectives :

(a) $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ définie par $f(x) = x^n$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ définie par $f(x) = \frac{1}{x}$;

(c) $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ définie par $f(x) = |z|$;

(d) $f : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{C}^*, \cdot)$ définie par $f(x) = \cos(x) + i \sin(x)$;

(e) $f : (\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{C}^*, \cdot)$ définie par $f(z) = e^z$.

Exercice 2.2. Montrer que la décomposition en cycles disjoints des éléments de A_5 est : soit de type 11111, soit de type 221, soit de type 311, ou de type 5. Donner un règle calculatoire simple pour déterminer quels sont les types des permutations dans A_n, pour n quelconque.

Exercice 2.3. Soit $\theta \in \mathrm{Hom}(G, G')$.

(a) Montrer que si $H' \leqslant G'$ alors $\theta^{-1}(H') \leqslant G$.

(b) Montrer que si θ est bijectif et G est abélien, alors G' est abélien. Est-ce que la surjectivité est suffisante ?

(c) Montrer que si θ est injectif et G' est abélien, alors G est abélien.

Exercice 2.4. Montrer que la relation d'isomorphisme est une relation d'équivalemce. C'est-à-dire, soit G, G' et G'' trois groupes, montrer que :

(a) $G \simeq G$;

(b) $G \simeq G' \iff G' \simeq G$;

(c) si $G \simeq G'$ et $G' \simeq G''$ alors $G \simeq G''$.

Exercice 2.5. Soit $\theta : G \to G'$ un morphisme de groupes injectif.

(a) Montrer que $G \simeq \theta(G) = \mathrm{Im}(\theta)$.

(b) Montrer que $\mathrm{ord}(\theta(x)) = \mathrm{ord}(x)$, pour tout $x \in G$.

(c) Si $G \simeq G'$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que le nombre d'éléments de G d'ordre n est égal au nombre d'éléments de G' d'ordre n, et définissant une bijection entre les deux ensembles correspondants.

Exercice 2.6. (a) Existe-t-il un morphisme de groupes surjectif $f : \mathbb{Z}_{24} \to \mathbb{Z}_5$?

(b) Existe-t-il un morphisme de groupes injectif $f : \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_{24}$?

Justifier vos réponses.

Exercice 2.7. Soit $G = \langle x \rangle$ un groupe monogène. On considère le morphisme de groupes $\theta : \mathbb{Z} \to G$, défini par $\theta(k) := x^k$.

(a) Si G est infini, montrer que $G \simeq \mathbb{Z}$.

(b) Si G est fini d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $G \simeq \mathbb{Z}_n$.

Exercice 2.8. On utilise ici la notation $[k]_6$ pour désigner la classe de l'entier k modulo 6, et la notation $[k]_3$ pour désigner la classe de l'entier k modulo 3. On considère les groupes $(\mathbb{Z}_6, +)$ et $(\mathbb{Z}_3, +)$ et la fonction

$$\theta : (\mathbb{Z}_6, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}_3, +) \ , \qquad \text{définie en posant} \qquad \theta([k]_6) := [k]_3.$$

(a) Montrer que θ est bien définie, à savoir qu'on a toujours que si $[k]_6 = [m]_6$ alors $[k]_3 = [m]_3$.

(b) Montrer que θ est un morphisme surjectif.

(c) Déterminer le noyau de θ.

(d) Généraliser ces énoncés à $(\mathbb{Z}_n, +)$ et $(\mathbb{Z}_d, +)$, pour d divisant n ; et les démontrer.

Exercice 2.9. (Translation à gauche) Soit G un groupe. Pour chaque $g \in G$, on considère la fonction $\Phi_g : G \to G$, définie en posant $\Phi_g(x) := g \cdot x$.

(a) Montrer que $\Phi_g \in S_G$ et que $(\Phi_g)^{-1} = \Phi_{g^{-1}}$.

(b) Est-ce que Φ_g est un morphisme de groupes ?

(c) Montrer que $\Phi_g \circ \Phi_h = \Phi_{gh}$ pour tout $g, h \in G$.

Exercice 2.10. Soit G un groupe. On utilise ici les notations de la section 2.5.

(a) Montrer que l'ensemble $\mathrm{Int}(G)$ des morphismes intérieurs du groupe G est un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(G)$.

(b) Soit $g, h \in G$, montrer que $\varphi_g = \varphi_h$ si et seulement si $g^{-1}h$ appartient à $Z(G)$, le centre du groupe G.

(c) Montrer que si G est fini, alors $|\mathrm{Int}(G)| \leqslant |G|$.

(d) Calculer $\mathrm{Int}(S_3)$ et $\mathrm{Int}(\mathbb{Z}_n)$.

Exercice 2.11. Montrer que :

(a) le groupe diédral D_m est isomorphe à un sous-groupe de S_m pour tout entier $m \geqslant 3$. En déduire que $D_3 \simeq S_3$.

(b) $\mathbb{Z}_n$ est isomorphe à un sous-groupe de S_n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2.12. Montrer que le sous-groupe de S_n, $n \geqslant 4$, engendré par les transpositions simples $\tau_1 = (1\,2)$ et $\tau_3 = (3\,4)$ est isomorphe au groupe de Klein $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Exercice 2.13. Démontrer la Proposition 2.9.

Exercice 2.14. Démontrer la Proposition 2.10.

Exercice 2.15. Montrer que le produit direct de groupes abéliens donne un groupe abélien.

Exercice 2.16. Montrer que le centre $Z(G \times H)$, du produit direct de groupes, coïncide avec le produit direct des centres : $Z(G) \times Z(H)$.

Exercice 2.17. Soit $n = pq$ où p, q sont deux nombres premiers distincts. Soit $H = \langle p \rangle \leqslant \mathbb{Z}_n$ et $K = \langle q \rangle \leqslant \mathbb{Z}_n$. Montrer que $\mathbb{Z}_n \simeq H \times K \simeq \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$.

Exercice 2.18. Soient G, H des groupes. Selon l'ordre choisi pour faire le produit cartésien, on obtient deux groupes, $G \times H$ et $H \times G$. Vérifier que l'application $\theta : G \times H \to H \times G$ définie par $\theta(g, h) = (h, g)$ est un isomorphisme.

Exercice 2.19. Soit $G_1, \ldots, G_n$ des groupes Pour σ une permutation dans S_n. Vérifier que l'application

$$\varphi_\sigma : G_1 \times \ldots \times G_n \to G_{\sigma(1)} \times \ldots \times G_{\sigma(n)}$$

définie par

$$\varphi_\sigma(g_1, \ldots, g_n) = (g_{\sigma(1)}, \ldots, g_{\sigma(n)})$$

est un isomorphisme.

Exercice 2.20. Soit A un groupe abélien, B un sous-groupe de A, et $\theta : A \to B$ un morphisme de groupes tel que $\theta(x) = x$ si $x \in B$ (N.B. ceci n'entraîne pas que θ est une bijection.)

(a) Montrer que si pour $a \in A$ on pose $b = \theta(a^{-1})$, alors $a \cdot b \in \ker(\theta)$.

(b) Montrer que A est produit direct interne de $\ker(\theta)$ et B.

Exercice 2.21. Soit G un groupe et $H \leqslant G$.

(1) Montrer que les énoncés suivants sont équivalents.

(a) $H \lhd G$;

(b) $xHx^{-1} = H$, pour tout $x \in G$;

(c) $x^{-1}Hx = H$, pour tout $x \in G$;

(d) $xhx^{-1} \in H$, pour tout $x \in G$ et tout $h \in H$;

(e) $x^{-1}hx \in H$, pour tout $x \in G$ et tout $h \in H$.

(2) Démontrer la proposition 2.13.

Exercice 2.22. Soit G un groupe, montrer que $\mathrm{Int}(G) \lhd \mathrm{Aut}(G)$.

Exercice 2.23. Démontrer la Proposition 2.15.

Exercice 2.24. Soit G un groupe. Soit H, K des sous-groupes de G tel que $H \cap K = \{e\}$ et $G = HK$. Montrer que H et K sont des sous-groupes normaux de G si et seulement si $hk = kh$, pour tout $(h, k) \in H \times K$., En déduire que si H, K sont des sous-groupes normaux de G, $H \cap K = \{e\}$ et $G = HK$, alors $G \simeq H \times K$.

Exercice 2.25. On pose, dans le groupe diédral $\mathcal{D}_6$ engendré par la rotation r d'ordre 6 et la réflexion s d'ordre 2, $H = \langle r^2, s \rangle$, $K = \langle r^3 \rangle$ et $L = \langle s \rangle$.

(a) Montrer que $H \simeq \mathcal{D}_3 \simeq S_3$.

(b) Montrer que $\mathcal{D}_6 \simeq H \times K$.

(c) En déduire que $\mathcal{D}_6 \simeq S_3 \times \mathbb{Z}_2$.

(d) Montrer que $\mathcal{D}_6 \simeq H \times L$.

Exercice 2.26. Soit $m \geqslant 3$. On pose, dans le groupe diédral $\mathcal{D}_m$ engendré par la rotation r d'ordre m et la réflexion s d'ordre 2, $H = \langle r \rangle$ et $K = \langle s \rangle$. Montrer que $\mathcal{D}_m \simeq H \rtimes K$, $H \simeq \mathbb{Z}_m$ et $K \simeq \mathbb{Z}_2$.

Exercice 2.27 (Produit directe interne de plusieurs sous-groupes). Soit G un groupe et soit $H_1, \ldots, H_n$ des sous-groupes normaux de G.

(a) Vérifiez que les énoncés suivants sont équivalents :

  (a) Pour tout i, $H_i \cap \langle \bigcup_{j \neq i} H_j \rangle = \{e\}$.

  (b) Tout élément $g \in G$ s'exprime de façon unique comme un produit d'éléments des H_i, à savoir $g = h_1 h_2 \ldots h_n, h_i \in H_i$.

(b) On suppose que

$$H_i \cap \langle H_1 \cup \ldots \cup \widehat{H_i} \cup \ldots \cup H_n \rangle = \{e\},$$

pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, et

$$G = H_1 H_2 \ldots H_n.$$

Montrer que

$$G \simeq H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n.$$

On dit alors que G est le **produit direct interne** de ses sous-groupes normaux $H_1 \ldots, H_n$.

(c) Montrer que $\mathbb{Z}_{30}$ est produit direct interne de ses sous-groupes $\langle 15 \rangle$, $\langle 10 \rangle$ et $\langle 6 \rangle$.

Exercice 2.28. Soit G un groupe, $N \lhd G$ un sous-groupe normal de G et $H \leqslant G$ un sous-groupe de G tel que $G = N \rtimes H$ est un produit semi-direct interne. Si $K \leqslant G$ tel que $N \subseteq K$, montrer que $K \simeq N \rtimes (K \cap H)$.

Exercice 2.29. Soit $a \in \mathbb{Q}^*$, on pose $f_a : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ l'application définie par

$$f_a(x) = ax.$$

(1) Montrer que f_a est un automorphisme du *groupe additif* $\mathbb{Q}$.

(2) Montrer que si φ est un endomorphisme du *groupe additif* $\mathbb{Q}$, alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\varphi(n) = n\,\varphi(1) \quad \text{et} \quad \varphi(n) = m\,\varphi\left(\frac{n}{m}\right).$$

(3) Montrer que l'application suivante est un isomorphisme de groupes :

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{Q}^* & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}) \\ a & \longmapsto & f_a \end{array}$$

Exercice 2.30. Soit $\varphi : G \to G'$ et $\psi : G' \to G$ deux morphismes de groupes tel que $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_G$.

(a) Montrer que ψ est surjective.

(b) Montrer que φ est injective.

(c) Montrer que $\ker(\psi) = \ker(\varphi \circ \psi)$.

(d) Montrer que $G' \simeq \ker \psi \rtimes \varphi(G)$.

Exercices exploratoires

Exercice 2.31. Soit H, K et G trois groupes, on considère

$$e \xhookrightarrow{i} H \xhookrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{\psi} K \xrightarrow{p} e$$

une **suite exacte courte de groupes**, c'est-à-dire, i, φ sont des morphismes de groupes injectifs, ψ, p sont des morphismes de groupes surjectifs et $\ker \psi = \varphi(H)$.

(a) Soit H' un groupe et

$$e \xhookrightarrow{i'} H \xhookrightarrow{\varphi'} G \xrightarrow{\psi} K \xrightarrow{p} e$$

une suite exacte courte de groupe. Montrer que $H \simeq H'$.

(b) Soit finalement G' un groupe et

$$e \xhookrightarrow{i} H \xhookrightarrow{\varphi'} G \xrightarrow{\psi'} K \xrightarrow{p} e$$

une suite exacte de groupe. Est-ce que G est isomorphe à G' ? (Indication : on pourra considérer $\mathbb{Z}_n$ et le groupe de Klein $G' = \langle \tau_1, \tau_3 \rangle \leqslant S_4$ engendré par les deux transpositions simples τ_1 et τ_3 qui commutent.

(c) Soit K' un groupe et

$$e \xhookrightarrow{i} H \xhookrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{\psi'} K \xrightarrow{p'} e$$

une suite exacte courte de groupe. Montrer que $K \simeq K'$ (cette question difficile deviendra très facile avec les outils du chapitre suivant).

Exercice 2.32 (Produit semidirect externe). Soient G et H deux groupes et soit $\varphi \in \mathrm{Hom}(G, \mathrm{Aut}(H))$ un morphisme de groupes de G dans le groupe des automorphismes sur H. On notera φ_g l'image de $g \in G$ par φ. On munit l'ensemble $H \times G$ de la loi de composition interne : $(h, g)(h', g') = (h\varphi_g(h'), gg')$.

(a) Montrer que $H \times G$ munit de cette loi est un groupe. Déterminer φ pour que cette structure soit le produit direct.

Ce groupe sera noté $H \rtimes_\varphi G$ (ou plus simplement $H \rtimes G$) et est appelé *produit semi-direct de H par G (relativement à φ)*.

(b) Soit H, K deux sous-groupes de G.

(a) Montrer que si $HK = KH$ alors HK est un sous-groupe de G.

(b) Supposons que $G = HK$, H est normal dans G et $K \cap H = \{e\}$. Montrer que $G \simeq H \rtimes K$ pour un automorphisme de H que l'on précisera.

(c) Avec les mêmes hypothèses que ci -dessus, montrer que $G \simeq H \times K$ si et seulement si $kh = hk$, pour tout $k \in K$ et $h \in H$.

(c) Soit $m \geqslant 3$. Montrer que $\mathcal{D}_m \simeq \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ où $\varphi_{1+2\mathbb{Z}}(1 + m\mathbb{Z}) = m - 1 + m\mathbb{Z}$.

Exercice 2.33. On rappelle que le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est un groupe infini engendré par les matrices

$$S := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{et} \qquad R := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

et qu'on a les relations $S^4 = \mathrm{Id}$ et $R^3 = S^2$. Pour toute représentation linéaire $\rho : \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \to \mathbb{C}^*$,

(a) Montrer que

$$\rho \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{12} = 1, \qquad \text{pour tout} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}).$$

En conclure que $\rho(A) = \exp(2ki\,\pi/12)$ pour un certain $0 \leqslant k < 12$, pour tout A dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

(b) Montrer qu'il y a un nombre fini de morphismes de groupes de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ dans $GL(\mathbb{C}^*)$. Les trouver toutes.

Exercice 2.34. Définir la notion de morphisme, de monomorphisme, d'épimorphisme, et d'isomorphisme de monoïdes. Pour toute bijection $f : E \to F$, on considère la fonction

$$\Phi_f : \mathrm{Fonct}(E, E) \to \mathrm{Fonct}(F, F),$$

qui envoie $g \in \mathrm{Fonct}(E, E)$ sur $f \circ g \circ f^{-1}$. Montrer que Φ_f est un isomorphisme de monoïde. Comme pour les groupes, on désigne respectivement par $\ker(\theta)$ et $\mathrm{Im}(\theta)$, le noyau et l'image d'un morphisme de monoïde $\theta : M \to M'$, avec les définitions évidentes. Montrer qu'on a

(a) Le noyau $\ker(\theta)$ est un sous-monoïde de M.

(a) L'image $\mathrm{Im}(\theta)$ est un sous-monoïde de M'.

(b) θ est injectif si et seulement si $\ker(\theta) = \{e\}$;

(c) θ est surjectif si et seulement si $\mathrm{Im}(\theta) = M'$.

Exercice 2.35. Rappelons (voir Exercice 1.44) que le monoïde libre $\mathcal{A}^*$ est constitué de l'ensemble des mots $a_1a_2\cdots a_n$, et que sa loi de composition est la concatenation. On considère ici le cas où A est un ensemble fini.

(a) Soit $f : \mathcal{A}^* \to M$ un morphisme de monoïde (et donc M est un monoïde). Montrer que f est entièrement caractérisée par sa valeur sur chaque lettre. Autrement dit, si f et g sont deux tels morphismes, alors on a $f = g$ si et seulement si $f(a) = g(a)$ pour tout $a \in \mathcal{A}$.

(b) Soit M un monoïde fini. En imitant la preuve du théorème de Cayley, montrer qu'il existe un monomorphisme de monoïdes $\varphi : M \to \mathrm{Fonct}(M, M)$, où l'opération pour ce dernier monoïde est la composition de fonctions. Est-ce que la démonstration demeure valable si M est infini ?

(c) Définir la notion d'action d'un monoïde M sur un ensemble E. Montrer que la donnée d'une action $M \times E \to E$ est équivalente à la donnée d'un morphisme de monoïde $M \to \text{Fonct}(E, E)$.

(d) Pour une action d'un monoïde M sur E, et tout élément x de E, montrer que l'ensemble des éléments de M qui fixent x est un sous-monoïde (définition ?) de M.

(e) Montrer que la donnée d'une action du monoïde libre $\mathcal{A}^*$ sur un ensemble E est équivalente à la donnée d'une fonction (quelconque) $A \times E \to E$. Voir la notion de monoïde syntaxique en théorie des automates.

Exercice 2.36. Définir les notions de noyau et d'image pour les morphismes d'anneaux commutatifs et les morphismes d'espaces vectoriels (alias transformations linéaires). Puis montrer que

(a) Le noyau d'un morphisme d'anneaux commutatifs est un **idéal**. Rappelons qu'un ideal J d'un anneau commutatif A, est un sous-groupe additif de A, tel que $a \cdot x$ est dans J, pour tout $x \in J$ et tout $a \in A$.

(b) Le noyau d'un morphisme d'espace vectoriel est un sous-espace vectoriel.

(c) Dans les deux cas, montrer qu'un morphisme θ est injectif, si et seulement si $\ker(\theta) = \{0\}$.

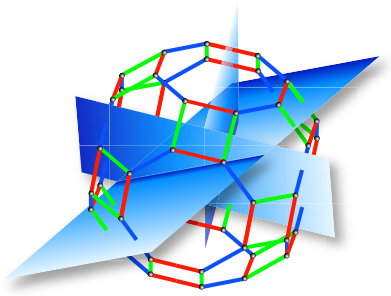
En théorie des catégories, on donne des définitions qui unifient tout ces concepts.

Exercice 2.37. Montrer que le groupe de transformation du Cube de Rubik se décrit comme (voir Rubik's Cube group)

$$(\mathbb{Z}_3^7 \times \mathbb{Z}_2^{11}) \rtimes ((A_8 \times A_{12}) \rtimes \mathbb{Z}_2).$$

Chapitre 3

Actions de groupes

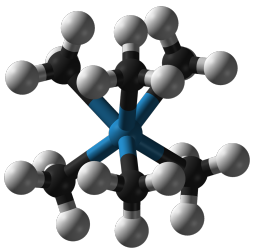


Le théorème de Cayley prouve l'existence pour un groupe G d'un groupe symétrique dans lequel G est (à isomorphisme près) un sous-groupe. Ceci nous amène à nous poser la question de la construction du plus petit groupe symétrique ayant cette propriété.

Dans ce chapitre nous allons étudier, étant donnée un groupe G et un ensemble E, les morphismes de groupes de G dans S_E. Nous allons voir que ceci revient à étudier les actions du groupe G sur l'ensemble E, c'est-à-dire des fonctions

$$f : G \times E \longrightarrow E,$$

avec de bonnes propriétés qui assurent que f « respecte » l'opération de groupe. Intuitivement, la fonction f exprime en quoi le groupe G permet de « transformer » les éléments de E. Dans un tel contexte, on interprète $f(g, x)$, pour $g \in G$ et $x \in E$, comme une certaine transformation de x selon g.



Hexaméthyltungstène.

C'est souvent la compréhension de ses actions qui permet de bien voir quel est le rôle que joue un groupe donné en mathématiques, ou dans d'autres domaines des sciences. En effet, reformulé pour des physiciens, c'est essentiellement le « principe de relativité » de Galilée [1] qui veut qu'une loi de la physique soit exprimée de façon indépendante de l'observateur. En ce sens, les chimistes utilisent la théorie des groupes pour identifier la forme d'une molécule. Pour exemple, une telle étude permet de déterminer que la molécule d'hexaméthyltungstène $W(CH_3)_6$ à la forme décrite à la figure ci-contre.

1. Galilei Galileo, 1564–1642.

Dans le cas où G agit par transaltion sur l'un de ses sous-groupes, cela nous permet de démontrer un outil puissant pour l'étude des groupes : le Théorème de Lagrange [2]. Ce théorème donne une information primordiale sur le calcul des ordres des sous-groupes d'un groupe fini : ceux-ci divisent l'ordre du groupe.

3.1 Groupe opérant sur un ensemble

Définition. Soit G un groupe et E un ensemble. Une **action (à gauche) de G sur E** est la donnée d'une loi de composition externe (à gauche)

$$\begin{array}{ccc} G \times E & \longrightarrow & E \\ (g, x) & \longmapsto & g \cdot x \end{array}$$

vérifiant les conditions suivantes :

(i) $e \cdot x = x$, où e désigne l'élément neutre de G ;

(ii) $(g_1 g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x)$.

Dans ce cas on dit aussi que G **opère (à gauche)** sur E, ou encore que **G agit sur E**. L'ensemble E s'appelle un **G-ensemble**.

Remarque. Il existe des actions à droites de G sur E : on considère alors une loi de composition externe à droite $E \times G \to E$, définie par $(x, g) \mapsto x \cdot g$, et vérifiant les hypothèses à droite $x \cdot e = x$ et $x \cdot (g_1 g_2) = (x \cdot g_1) \cdot g_2$.

Exemple (Translation à gauche). La multiplication à gauche de G munit G de la structure d'un G-ensemble appelé **translation à gauche**. En effet, la loi de composition externe

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \longrightarrow & G \\ (g, x) & \longmapsto & gx \end{array}$$

vérifie bien pour tout $x \in E$ et $g_1, g_2 \in G$ que $ex = x$ et $(g_1 g_2)x = g_1(g_2 x)$ (la loi de G est associative).

Exemple (Action par conjugaison). L'**action par conjugaison** de G est définie comme suit :

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \longrightarrow & G \\ (g, x) & \longmapsto & g \cdot x = gxg^{-1}. \end{array}$$

L'action par conjugaison est bien une action car pour tout $x \in E$ et $g_1, g_2 \in G$ on a $e \cdot x = exe = x$ et

$$(g_1 g_2) \cdot x = (g_1 g_2)x(g_1 g_2)^{-1} = g_1 g_2 x g_2^{-1} g_1^{-1} = g_1(g_2 x g_2^{-1})g_1^{-1} = g_1 \cdot (g_2 \cdot x).$$

2. Joseph Louis Lagrange (1736–1813).

Exemple (Actions sur $\mathcal{P}(G)$). La translation à gauche de G sur G s'étend plus généralement à l'ensemble $\mathcal{P}(G)$ de G :

$$\begin{array}{rcl} G \times \mathcal{P}(G) & \longrightarrow & \mathcal{P}(G) \\ (g, A) & \longmapsto & gA := \{gx \mid x \in A\}. \end{array}$$

Le lecteur vérifiera que la loi de composition externe ci-dessus défini bien une action.

De même, l'action par conjugaison de G s'étend naturellement en une action de G sur $\mathcal{P}(G)$:

$$\begin{array}{rcl} G \times \mathcal{P}(G) & \longrightarrow & \mathcal{P}(G) \\ (g, x) & \longmapsto & gAg^{-1} := \{gxg^{-1} \mid x \in A\}. \end{array}$$

De façon générale, si E est un G-ensemble alors l'action $(g, x) \mapsto g \cdot x$ de G sur E s'étend en une action de G sur $\mathcal{P}(E)$ de la façon suivante :

$$\begin{array}{rcl} G \times \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ (g, A) & \longmapsto & g \cdot A := \{g \cdot a \mid a \in A\}. \end{array}$$

En effet, $e \cdot A = \{e \cdot a \mid a \in A\} = \{a \mid a \in A\} = A$ en vertu de la Condition (i) de la définition et pour $g, h \in G$ on a

$$(gh) \cdot A = \{(gh) \cdot a \mid a \in A\} = \{g \cdot (h \cdot a) \mid a \in A\} = \{g \cdot a' \mid a' \in h \cdot A\} = g \cdot (h \cdot A).$$

en vertu de la Condition (ii) de la définition.

Exemple (Action de S_n sur $\mathbb{R}^n$). Le groupe symétrique S_n, où $n \in \mathbb{N}^*$ agit sur $\mathbb{R}^n$ par permutation des coordonnées.

Nous montrons maintenant que la donnée d'une action d'un groupe G sur un ensemble E est la même que la donnée d'un morphisme de groupes de G dans S_E.

Proposition 3.1. *Soit G un groupe et E un ensemble.*

1. *Si E est un G-ensemble, avec l'action de G sur E définie par $(g, x) \mapsto g \bullet x$, alors l'application*

$$\begin{array}{rcl} \rho_\bullet : G & \longrightarrow & S_E \\ g & \longmapsto & \rho_g, \end{array}$$

est un morphisme de groupes, où la bijection $\rho_g : E \to E$ est définie par $\rho_g(x) = g \bullet x$ pour tout $x \in E$.

2. *Si $\rho : G \to S_E$ est un morphisme de groupes, alors la loi de composition externe*

$$\begin{array}{rcl} \bullet_\rho : G \times E & \longrightarrow & E \\ (g, x) & \longmapsto & g \bullet_\rho x := \rho(g)(x) \end{array}$$

est une action de G sur E.

De plus, l'application $\bullet \mapsto \rho_\bullet$ est une bijection entre l'ensemble des actions de G sur E et les morphismes de groupes de G dans S_E.

Démonstration. Exercice 3.1. ∎

On définit grâce à cette proposition le **noyau d'une action $\bullet$ de G sur E** comme le noyau $\ker \rho_\bullet$ de son morphisme de groupes associé $\rho_\bullet$. On dira qu'une action de G sur E est **fidèle** si son noyau est réduit à l'élément neutre de G.

Exemple. L'action de S_n sur $\mathbb{R}^n$ est fidèle. En effet son morphisme de groupes associé est

$$\begin{array}{rcl} \rho : G & \longrightarrow & S_{\mathbb{R}^n} \\ \sigma & \longmapsto & \rho_\sigma, \end{array}$$

où $\rho_\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est la bijection définie par $\rho_\sigma(x, \dots, x_n) = (x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, \dots x_{\sigma^{-1}(n)})$. Si $\sigma \in \ker \rho$ alors $\rho_\sigma = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$. Donc pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ on a : $x_{\sigma(i)} = x_i$, ce qui implique $\sigma(i) = i$. Donc $\sigma = e$. Le noyau de cette action est donc bien réduit à l'identité.

On observe que $\mathrm{Im}(\rho) \subseteq \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$. On appelle de telles action des **représentations linéaires de groupe**. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est alors appelé un **S_n-module**. Cette théorie est en dehors du cadre du cours, voir l'Annexe C pour un aperçu.

On termine cette section avec la définition suivante, qui sera très utile afin de construire des actions de G à partir d'action existante.

Définition. Soit G un groupe et E un G-ensemble. Un sous-ensemble A de E est dit **G-stable** ou **G-invariant**, si on a $g \cdot x \in A$ pour tout $x \in A$, c.-à-d.

$$g \cdot A \subseteq A, \qquad \text{pour tout} \qquad g \in G.$$

Proposition 3.2. *Soit G un groupe, E un G-ensemble et $A \subseteq E$.*

1. *A est G-stable si et seulement si $g \cdot A = A$ pour tout $g \in G$.*
2. *Si A est un sous-ensemble de E stable par l'action G, alors est un G-ensemble pour l'action $G \times E \to E$ restreinte à $G \times A$. On dit que A est un **sous-G-ensemble de E**.*

Démonstration. (2) est une conséquence du fait que l'image de la restriction de l'action $G \times E \to E$ à $G \times A$ est contenue dans A par définition, donc on obtient une action $G \times A \to A$. Pour (1) il suffit de montrer l'implication directe. On note que $g \cdot A \subseteq A$ pour tout $g \in G$ car A est G-stable. Donc en particulier $g^{-1} \cdot A \subseteq A$ pour tout $g \in G$. Le résultat est alors une conséquence de l'équation suivante :

$$A = e \cdot A = (gg^{-1}) \cdot A = g \cdot (g^{-1} \cdot A) \subseteq g \cdot A.$$

■

3.2 Orbites et stabilisateurs

Afin d'étudier une action d'un groupe sur un ensemble, deux notions sont particulièrement importantes. La notion d'orbites et celles de stabilisateurs.

Définition. Soit G un groupe et E un G-ensemble. L'**orbite de $x \in E$** est l'ensemble :

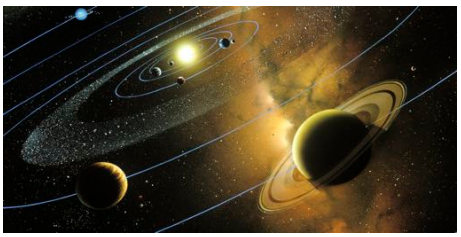
$$\mathrm{Orb}(x) := \{y \in E : \text{ il existe } g \in G \text{ tel que } y = g \cdot x\}.$$

Il y a deux cas extrêmes. Le premier est le cas où il y a une seule orbite, on dit alors que l'action est **transitive**. Le deuxième cas est celui où chaque orbite ne contient qu'un seul élément, on dit alors que l'action est **triviale**. On désigne par E/G **l'ensemble des orbites** de l'action, c.-à-d.

$$E/G = \{\mathrm{Orb}(x) \mid x \in E\}.$$

Exemple. (a) L'action par translation à gauche de G sur G n'a qu'une orbite qui est G.

(b) Les orbites de l'action par conjugaison de G sur G sont appelée les **classes de conjugaison de G**. Elles jouent un rôle très important dans la compréhension des groupes finis. En fait, les classes de conjugaison de S_n sont très bien décrites au moyen de la notion de **partage de l'entier n** : un partage λ de n est une liste décroissante d'entier strictement positif dont la somme fait n. À toute permutation $\sigma \in S_n$ on associe un partage $\lambda(\sigma)$ en décomposant σ en cycles disjoints, puis en réordonnant du plus grand au plus petit les longueurs de ces cycles. Par exemple $\lambda((145)(28)(369)) = (3, 3, 2, 1)$. On sait alors que σ et γ sont conjuguées si et seulement si $\lambda(\sigma) = \lambda(\gamma)$. De ce fait les classes de conjugaison de S_n sont en bijection avec les partages de l'entier n ; voir l'Exercice 3.6 pour plus de détails.



Orbites (selon la NASA).

La proposition suivante énonce en particulier que tout G-ensemble est une union disjointe de ses orbites.

Proposition 3.3. *1. Si $x \in E$, alors l'action de* $\mathrm{Orb}(x)$ *est un sous-G-ensemble pour l'action de G sur E restreinte à* $\mathrm{Orb}(x)$. *De plus cette action est transitive.*

2. *L'action de G sur E induit une relation d'équivalence sur E, définie en posant $x \equiv y$ si et seulement si* $\mathrm{Orb}(x) = \mathrm{Orb}(y)$.
3. *L'ensemble E/G est une partition de E, autrement dit :*

$$E = \bigsqcup_{\mathcal{O} \in E/G} \mathcal{O} \qquad \textit{(union disjointe).} \tag{3.1}$$

Autrement dit, si E/G est fini, et si $x_1, x_2 \ldots, x_n$ sont des représentants des diverses classes d'équivalences concernées, alors :

$$E = \mathrm{Orb}(x_1) \sqcup \mathrm{Orb}(x_2) \sqcup \cdots \sqcup \mathrm{Orb}(x_n), \tag{3.2}$$

Démonstration. Voir exercice 3.3. ∎

On peut donc, pour comprendre les actions en général, chercher à comprendre les actions transitives, ce que nous ferons dans la section suivante.

Définition. Soit G un groupe et E un G-ensemble. Le **stabilisateur** de x, noté $\mathrm{Stab}_G(x)$ (ou $\mathrm{Stab}(x)$ si il n'y a pas de confusion possible), est l'ensemble des éléments de G qui **fixe** $x \in E$:

$$\mathrm{Stab}(x) := \{g \in G : g \cdot x = x\}.$$

Exemple. Pour l'action par conjugaison de G sur G le stabilisateur

$$\mathrm{Stab}(h) = \{g \in G \mid ghg^{-1} = h\} = \{g \in G : gh = hg\},$$

est appelé le **centralisateur de h** de h, et on le note alors $C(h)$. On note que le centre du groupe est intersection des centralisateurs :

$$Z(G) = \bigcap_{h \in G} C(h).$$

Plus généralement, pour l'action par conjugaison sur les parties de E,

$$G \times \mathcal{P}(G) \to \mathcal{P}(G), \qquad \text{avec} \qquad g \cdot X = gXg^{-1} := \{gxg^{-1} : x \in X\},$$

on regarde souvent l'orbite d'un sous-groupe H de G, alors $\mathrm{Orb}(H)$ consiste en les conjugués de H, et

$$\mathrm{Stab}(H) = \{g \in G : gHg^{-1} = H\}$$

est appelé **le normalisateur de H**. On le note alors par $N(H)$. On observe que $N(H) = G$ si et seulement si H est normal dans G.

Proposition 3.4. *Soit G un groupe, E un G-ensemble.*

1. *Si* $x \in E$, *alors* $\mathrm{Stab}(x)$ *est un sous-groupe de* G.
2. *Si* $\mathrm{Orb}(x) = \mathrm{Orb}(y)$, *où* $x, y \in E$, *alors* $\mathrm{Stab}(x)$ *et* $\mathrm{Stab}(y)$ *sont conjugués.*

Démonstration. (1) Il est clair que $e \in \mathrm{Stab}(x)$. Soit $g, h \in \mathrm{Stab}(x)$, alors $h \cdot x = x$ implique que $h^{-1} \cdot x = h^{-1} \cdot (h \cdot x) = (h^{-1}h) \cdot x = x$. Donc $h^{-1} \in \mathrm{Stab}(x)$. De plus $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x) = g \cdot x = x$ car $g, h \in \mathrm{Stab}(x)$. Donc gh est aussi élément de $\mathrm{Stab}(x)$, ce qui conclut la preuve de la proposition.

(2) Supposons $y = g \cdot x$. Alors $g^{-1} \cdot y = (g^{-1}g) \cdot x = x$. Montrons que $\mathrm{Stab}(y) \subseteq g\,\mathrm{Stab}(x)g^{-1}$ et $g\,\mathrm{Stab}(x)g^{-1} \subseteq \mathrm{Stab}(y)$. Soit $h \in \mathrm{Stab}(y)$, alors on a

$$\begin{aligned} h \cdot (g \cdot x) = g \cdot x \quad &\iff \quad (hg) \cdot x = g \cdot x \\ &\iff \quad g^{-1}hg \cdot x = x \\ &\iff \quad g^{-1}hg \in \mathrm{Stab}(x), \end{aligned}$$

et on a $h = g(g^{-1}hg)g^{-1}$. Cela montre la première inclusion. Soit $k \in \mathrm{Stab}(x)$. On a $gkg^{-1} \cdot y = (gk) \cdot (g^{-1}y) = gk \cdot x = g \cdot (k \cdot x) = g \cdot x = y$. Cela montre la deuxième inclusion. ∎

Exemple (Transformations du plan). Pour $G = (\mathbb{R}, +)$, et $E = \mathbb{C}$, on a l'action

$$\mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad \text{avec} \qquad (r, z) \mapsto r + z,$$

qui correspond aux **translations horizontales** du plan des complexes. L'orbite $\mathrm{Orb}(z)$ de $z \in \mathbb{C}$ correspond à la droite horizontale qui passe par z, et $\mathrm{Stab}(z) = \{0\}$. On obtient donc $\mathbb{C}$ comme réunion d'orbites correspondant aux droites horizontales. Pour $G = (\mathbb{C}, +)$, et $E = \mathbb{C}$, on a l'action

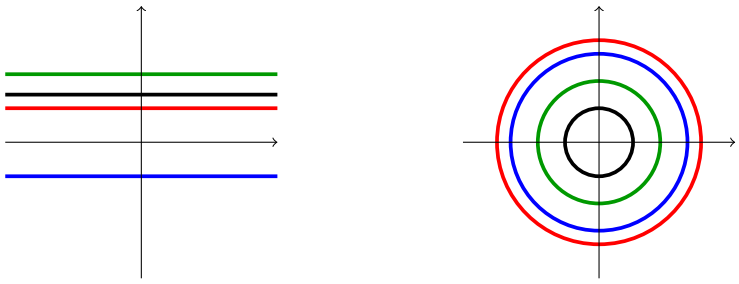


FIGURE 3.1 – Orbites respectives, dans $\mathbb{C}$, pour les actions par translations ou rotations.

$$\mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad \text{avec} \qquad (r, z) \mapsto r + z,$$

qui correspond aux **translations** du plan des complexes. Cette action est transitive est $\mathrm{Stab}(z) = \{0\}$ si $z \in \mathbb{C}^*$ et $\mathrm{Stab}(0) = \mathbb{C}$.

Maintenant, avec $G = (\mathbb{R}, +)$ et $E = \mathbb{C}$, l'action $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, où $(\theta, z) \mapsto e^{i\theta} z$, correspond aux **rotations centrales** du plan des complexes. Pour $z \in \mathbb{C}$, l'orbite $\mathrm{Orb}(z)$ est donc le cercle de centre 0 passant pas z. Encore une fois, $\mathrm{Stab}(X) = \{e\}$. Enfin, pour $G = (\mathbb{R}^*, \cdot)$ et $E = \mathbb{C}$, on a l'action $\mathbb{R}^* \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, avec $(r, z) \mapsto rz$, qui multiplie un nombre complexe par un réel non nul. Ce sont les **homothéties** du plan. Pour $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, l'orbite $\mathrm{Orb}(z)$ correspond à la droite de direction z, à laquelle on enlève l'origine, et que $\mathrm{Stab}(z) = \{1\}$. D'autre part, pour $z = 0$, l'orbite est $\mathrm{Orb}(0) = \{0\}$, et $\mathrm{Stab}(0) = \mathbb{R}^*$.

Plus généralement, on s'intéresse à des groupes de transformations linéaires d'espaces vectoriels, dont des exemples sont les groupes engendrés par des réflexions. On peut alors définir des actions de ces groupes sur les constructions faisant intervenir les espaces vectoriels de départ (produis directs, produits tensoriels, etc.). Il y a là de nombreuses connexions avec plusieurs des domaines des mathématiques et de la physique.

Exemple (Ensembles et fonctions). Si G agit sur E, alors on peut se servir de cette action pour construire des actions de G sur les constructions ensemblistes faites à partir de E. Ainsi, on peut faire agir G sur le produit cartésien E^n, $n \in \mathbb{N}^*$, en posant

$$G \times E^n \longrightarrow E^n, \qquad \text{avec} \qquad g \cdot (x_1, \ldots, x_n) := (g \cdot x_1, \ldots, g \cdot x_n).$$

Il est facile de vérifier directement que ceci donne bien une action de G. On a déjà vu que l'action de G sur E s'étend en une cation de G sur $\mathcal{P}(E)$. En particulier, l'ensemble vide est toujours un point fixe pour cette dernière action, c.-à-d. $\mathrm{Orb}(\varnothing) = \{\varnothing\}$. Il y a un grand nombre d'autres actions qui peuvent ainsi être construites. Ainsi, on a l'action de G sur l'ensemble $\mathrm{Fonct}(F, E)$ des fonctions de F vers E, quelque soit F. En effet, pour $f : F \to E$ et g dans G, il suffit de considérer la fonction $(g \cdot f) : F \to E$, définie en posant $(g \cdot f)(x) := g \cdot (f(x))$, pour tout x dans E. Encore une fois, c'est une action de G :

$$G \times \mathrm{Fonct}(F, E) \longrightarrow \mathrm{Fonct}(F, E), \qquad \text{avec} \qquad (g, f) \mapsto g \circ f.$$

L'étude des actions de groupes sur les ensembles finis correspond à une grande part de la combinatoire moderne. Un des problèmes typiques consiste à décrire explicitement la partition en orbites de telles actions. C'est souvent un problème difficile. On voit dans l'exemple suivant comment le groupe symétrique joue un rôle central dans ce contexte.

Exemple (Actions de S_E). Pour un ensemble (fini) E, on a plusieurs actions intéressantes du groupe $G = S_E$. La plus simple est **l'action naturelle**

$$S_E \times E \to E, \qquad \text{avec} \qquad g \cdot x = g(x).$$

Plusieurs exemples s'obtiennent par des constructions ensemblistes classiques. Ainsi, on a l'action de S_E sur les produits cartésiens

$$E^n := \begin{cases} E \times E^{n-1} & \text{si } n > 1, \\ E & \text{si } n = 1. \end{cases}$$

obtenue en posant

$$\sigma \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\sigma(x_1), \sigma(x_2), \ldots \sigma(x_n)),$$

pour les $x_i \in E$. On obtient aussi, en combinant cette action avec l'action de S_E sur l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E, une action de S_E sur l'ensemble des **relations** sur E, c.-à-d. sur l'ensemble $\mathcal{P}(E \times E)$:

$$\sigma \cdot \mathcal{R} := \{(\sigma(x), \sigma(y)) \mid (x, y) \in \mathcal{R}\}.$$

D'autres exemples classiques correspondent à des actions de S_E sur l'ensemble $\mathcal{F}(E)$ des fonctions de E vers E. Ainsi, on a l'action par **conjugaison**

$$\sigma \cdot f := \sigma \circ f \circ \sigma^{-1},$$

pour $f : E \to E$; l'action par **composition à gauche**

$$\sigma \cdot f := \sigma \circ f;$$

ou l'action par **composition à droite**

$$\sigma \cdot f := f \circ \sigma^{-1}.$$

Observons, dans ce dernier cas, que le fait d'utiliser l'inverse assure qu'on a bien une action, puisque

$$\begin{aligned}
(\sigma \circ \tau) \cdot f &= f \circ (\sigma \circ \tau)^{-1} \\
&= f \circ (\tau^{-1} \circ \sigma^{-1}) \\
&= (f \circ \tau^{-1}) \circ \sigma^{-1} \\
&= (\tau \cdot f) \circ \sigma^{-1} \\
&= \sigma \cdot (\tau \cdot f).
\end{aligned}$$

On peut poursuivre ce genre de constructions dans toutes sortes de directions. C'est en fait le coeur d'une grande partie de la combinatoire, qui donne lieu entre autres à la Théorie des espèces de structures [3]. Les notions de stabilisateurs, d'orbites, et plusieurs autres concepts de la théorie des groupes y jouent un rôle fondamental. Exploitant des idées de la théorie des groupes (et de la théorie des catégories), la théorie des espèces (combinatoire) permet de résoudre de manière élégante (algébrique) un grand nombre de problèmes concernant des objets comme les fonctions, les graphes, les arbres, les permutations, les dérangements, les partitions, les ordres, etc. En plus de donner des fondements rigoureux à un large pan de la combinatoire énumérative, la théorie des espèces donne un riche contexte algébrique pour la construction de nouvelles espèces de structures. En plus de riches liens avec de nombreux domaines des mathématiques, elle a des applications en Physique théorique (diagrammes de Feynman, Théorie quantique des champs, etc.), Informatique théorique (Structures de données, Analyse de la complexité d'algorithmes, Programmation fonctionnelle, Sémantique des langages de programmation, etc.), et dans l'étude de certains processus stochastiques.

3. Développée par les mathématiciens de l'UQAM dans les années 1980. Voir un texte d'introduction disponible sur le web à l'adresse : http://bergeron.math.uqam.ca/files/2013/11/book.pdf.

3.3 Actions transitives et classes modulo un sous-groupe

Nous allons présenter ici une action importante d'un groupe G : l'action de G sur l'ensemble des classes modulo un sous-groupe H de G. Ce sont les actions qui sont clefs afin de comprendre les actions transitives.

3.3.1 Classes modulo un sous-groupe

S'inspirant de la relation de congruence modulo n dans $\mathbb{Z}$ (c'est-à-dire modulo le sous-groupe $n\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$) :

$$a \equiv b \pmod{n} \qquad \text{ssi} \qquad (-a) + b \in n\mathbb{Z},$$

on considère la définition qui est donnée dans la proposition suivante.

Proposition 3.5. *Soit H sous-groupe d'un groupe G, la* **congruence à gauche modulo H sur G,** *définie par*

$$g_1 \equiv g_2 \pmod{H} \iff g_1^{-1} g_2 \in H \iff g_1 H = g_2 H. \tag{3.3}$$

est une relation d'équivalence. De plus :

1. *les classes d'équivalence sont de la forme $xH := \{xh \mid h \in H\}$;*
2. *l'ensemble quotient de cette relation d'équivalence est $\mathrm{Orb}(H)$ pour l'action à gauche de G sur $\mathcal{P}(G)$. En particulier, G agit transitivement sur l'ensemble des classes à gauche modulo H.*

Démonstration. Le fait que H soit un sous-groupe assure que la relation $\equiv$, définie en (3.3), est bien une relation d'équivalence. En effet la réflexivité découle du fait que $e \in H$, puisqu'alors $x^{-1}x = e \in H$, et donc $x \equiv x$; la symétrie découle du fait que tout élément est inversible dans H, ce qui fait que $y^{-1}x = (x^{-1}y)^{-1} \in H$, et donc $x \equiv y$ si et seulement si $y \equiv x$. La transitivité est une conséquence du fait que H est stable. En effet, si $x \equiv y$ et $y \equiv z$ alors $x^{-1}y \in H$ et $y^{-1}z \in H$, et alors on a

$$x^{-1}z = x^{-1}yy^{-1}z \in H \quad \Longrightarrow \quad x \equiv z.$$

Il reste donc à montrer que la classe d'équivalence de x est bien $xH = \{xh \mid h \in H\}$. Par définition, pour $y \in xH$, on a $h \in H$ tel que $y = xh$. Donc $x^{-1}y = h \in H$ et il s'ensuit que $x \equiv y$. Réciproquement, soit $y \equiv x$, alors $h = x^{-1}y \in H$. Il existe donc $h \in H$ tel que $y = xh$, ce qui prouve l'affirmation.

Pour (2), Il suffit d'observer que toute classe à gauche xH s'obtient évidement de la classe H comme l'orbite de H sous l'action par translation de G sur $\mathcal{P}(G)$. ∎

Définition. Soit G un groupe et H un sous-groupe de G. La classe d'équivalence

$$xH := \{gh \mid h \in H\}, \qquad \text{pour} \qquad g \in G,$$

est appelée une **classe à gauche de x modulo H**. On note G/H l'ensemble quotient résultant, c.-à-d.

$$G/H := \{gH \mid g \in G\}. \tag{3.4}$$

En vertu de la proposition précédente, on sait que G agit transitivement par translation à gauche sur l'ensemble $\mathrm{Orb}(H)$ de ses classes à gauches modulo H.

Remarque. (a) Pour G noté additivement, on écrit $x + H$ pour la classe d'équivalence de x modulo H. On retrouve alors la notation « usuelle » pour le cas $G = \mathbb{Z}$ et $H = n\mathbb{Z}$, à savoir $k + n\mathbb{Z}$, pour $k \in \mathbb{Z}$; et l'ensemble quotient est bien $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

(b) Observons que $xH = H$ si et seulement si $h \in H$. Donc en particulier $\mathrm{Stab}(H) = \{g \in G : gH = H\} = H$. Observons aussi que, pour $x \neq y$, il est fort possible que $xH = yH$. On vérifie (exercice) que cela ne se produit que dans la cas où

$$xH = yH \quad \Longleftrightarrow \quad x^{-1}yH = H \quad \Longleftrightarrow \quad y^{-1}xH = H \quad \Longleftrightarrow \quad x^{-1}y \in H. \tag{3.5}$$

(c) De façon toute similaire, on a une notion de **congruence à droite modulo H**, définie en posant

$$x \equiv_d y \quad \Longleftrightarrow \quad xy^{-1} \in H.$$

On pose aussi que $Hx = \{hx \,|\, h \in H\}$. C'est la **classe à droite modulo H**. L'ensemble quotient résultant est noté $H\backslash G$. Comme pour les classes à gauche, on a la caractérisation suivante des classes à droite

$$y \in xH \qquad \text{ssi} \qquad y^{-1} \in Hx^{-1}.$$

(d) Un sous-groupe H de G est donc normal si et seulement si $xH = Hx$, pour tout $x \in G$.

(e) Pour G est abélien, les deux notions de classes à gauche et à droite coïncident, c.-à-d. que $xH = Hx$ pour tout $x \in G$.

Exemple. On considère $G = S_3$ et $H = \langle(12)\rangle$ alors :

$$G/H = \{H = (12)H;\ (23)H = (132)H;\ (13)H = (123)H\} \quad \text{et}$$

$$H\backslash G = \{H = H(12);\ H(23) = H(123);\ H(13) = H(132)\}.$$

Comme $(23)H = \{(23), (132)\} \neq \{(23), (123)\} = H(23)$, les classes à gauche et à droite ne sont pas égales. Donc H n'est pas un sous-groupe normal de S_3. Observons que le cardinal de chaque classe (à droite ou à gauche) est égal $|H|$.

Par contre, les classes du sous-groupe engendré par (123) sont égales et donc ce sous-groupe est normal dans S_3.

Une propriété importante des classes à gauche (ou à droite), observée dans l'exemple précédent, est soulignée par la proposition suivante.

Proposition 3.6. *Soit G un groupe et $H \leqslant G$, alors*

(1) *Pour tout $x \in G$, xH, Hx et H ont même cardinal.*

(2) *Les ensembles quotients G/H et $H\backslash G$ sont en bijection.*

Démonstration. On montre d'abord que la fonction $h \mapsto xh$ est une bijection de H sur xH (exercice). Posons $f(xH) = Hx^{-1}$, pour tout $x \in G$. La fonction $f : G/H \to H\backslash G$ est **bien définie**, à savoir que

$$xH = yH \iff x^{-1}y \in H \iff H = Hx^{-1}y \iff Hy^{-1} = Hx^{-1}.$$

Montrons que f est une bijection. Elle est injective, puisqu'on a

$$f(xH) = f(yH) \iff Hy^{-1} = Hx^{-1} \iff xH = yH.$$

De plus, f est surjective, puisque $Hx \in H\backslash G$ entraîne$f(x^{-1}H) = H(x^{-1})^{-1} = Hx$. ∎

Exemple. On considère $G = S_3$ et $H = \langle(12)\rangle$ comme avant. On a bien :

$$\mathrm{Orb}(H) = G/H = \{H,\ (23)H,\ (13)H\} \quad \text{et} \quad \mathrm{Stab}(H) = H.$$

On observe que $G/\mathrm{Stab}(H)$ et $\mathrm{Orb}(H)$ ont le même cardinal.

Proposition 3.7. *Pour tout groupe G opérant sur un ensemble E, et $x \in E$, on a une bijection entre* $\mathrm{Orb}(x)$ *et* $G/\mathrm{Stab}(x)$.

Démonstration. Considérons les ensembles $\mathrm{Orb}(x)$ et $\{g\,\mathrm{Stab}(x) : g \in G\} = G/\mathrm{Stab}(x))$. Notons que

$$\begin{aligned} g \cdot x = g' \cdot x &\iff g'^{-1} \cdot (g \cdot x) = g'^{-1}.(g' \cdot x) \\ &\iff (g'^{-1}g) \cdot x = (g'^{-1}g') \cdot x \\ &\iff (g'^{-1}g) \cdot x = e \cdot x \\ &\iff (g'^{-1}g) \cdot x = x \\ &\iff g'^{-1}g \in \mathrm{Stab}(x) \\ &\iff g\,\mathrm{Stab}(x) = g'\,\mathrm{Stab}(x). \end{aligned}$$

On peut donc définir l'application

$$\mathrm{Orb}(x) \to \{g\,\mathrm{Stab}(x) : g \in G\}, \qquad \text{avec} \qquad g \cdot x \mapsto g\,\mathrm{Stab}(x),$$

qui est bijective d'inverse l'application $g\mathrm{Stab}(x) \mapsto g \cdot x$. ∎

3.3.2 Classification des actions transitives

On est maintenant prêt à classifier les actions transitives d'un groupe G. Pour comparer deux actions

$$G \times E \to E, \qquad \text{et} \qquad G \times F \to F,$$

de G, on considère les fonctions $\theta : E \to F$ qui « préservent » l'action.

Définition. Soit E et F deux G-ensemble. On note $\cdot$ l'action de G sur E et $\bullet$ l'action de G sur F. Une application $\theta : E \to F$ est un **morphisme de G-ensembles** si :

$$\theta(g \cdot x) = g \bullet \theta(x), \tag{3.6}$$

pour tout g dans G, et tout x dans E.

Si θ est une fonction bijective, alors on dit que c'est un **isomorphisme d'action** et que E et F sont des **G-ensembles isomorphes**.

Théorème 3.8. *1. Tout G-ensemble se décompose en union disjointe de G-ensembles transitifs.*

2. Toute action transitive d'un groupe G est isomorphe à une action de G sur l'ensemble G/H, pour H un sous-groupe de G. Deux telles actions G/H et G/K sont isomorphes, si et seulement si H et K sont conjugués.

Démonstration. Voir l'exercice 3.20. ■

Corollaire 3.9. *Pour G fini, le nombre d'actions transitives distinctes de G est égal au nombre de classes de conjugaison de sous-groupes de G.*

Remarque. Avec un système de calcul formel, on peut calculer explicitement tous les sous-groupes d'un groupe G fini, et ainsi leur classes de conjugaison et les actions transitives de SG. Dans le cas particulier du groupe symétrique S_4, on obtient qu'il y a 30 tels sous-groupes, qui sont inclus [4] les uns dans les autres de la manière illustrée à la Figure 3.2. Le sous-groupe K_4 (le groupe de Klein) est un sous-groupe normal de A_4, d'ordre 4. On constate qu'il y a 11 classes de conjugaison de sous-groupes de S_4, avec les sous-groupes d'une même classe de même couleur (non étiquetté). Les seuls sous-groupes normaux sont ceux qui sont étiquettés, c.-à-d. $\{e\}$, K_4, A_4 et S_4. Les premiers termes de la suite donnant le **nombre de sous-groupes** de S_n sont

$$1, 1, 2, 6, \mathbf{30}, 156, 1455, 11300, 151221, 1694723, 29594446, 404126228, 10594925360, 175238308453, \ldots$$

D'autres termes sont connus, le plus grand étant le 18-ième qui égal à

$$7598016157515302757.$$

4. Un treillis est un ensemble ordonné avec certaines bonnes propriétés. Pour plus de détails, voir ici.

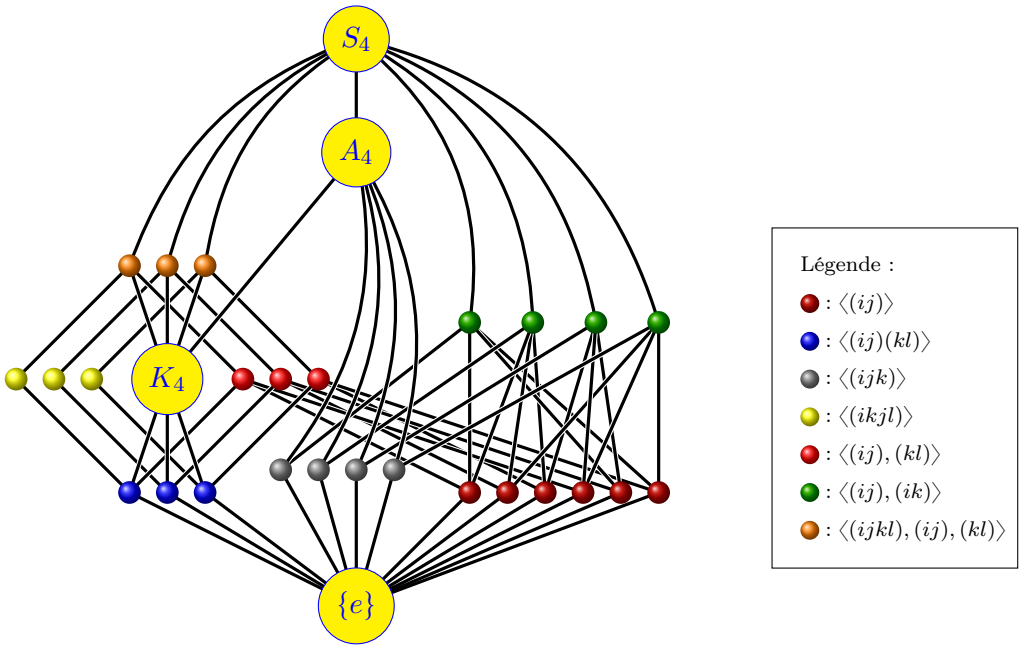


FIGURE 3.2 – Le treillis des 30 sous-groupes de S_4.

Pour l'instant, il semble difficile d'aller beaucoup plus loin dans le calcul de ces nombres. Les premiers termes de la suite donnant le **nombre de classes de conjugaisons** de sous-groupes de S_n sont :

$$1, 1, 2, 4, \mathbf{11}, 19, 56, 96, 296, 554, 1593, 3094, 10723, 20832, 75154, 159129, 686165, 1466358, 7274651, \ldots$$

Il ne semble pas qu'on en connaisse d'autres termes, et aucune formule n'est connue pour cette suite. Seul un calcul « brutal » permet de l'obtenir.

3.4 Théorème de Lagrange

On va démontrer dans cette section un résultat très important en théorie des groupes finis : le cardinal d'un sous-groupe divise toujours le cardinal du groupe.

Définition. Pour tout H sous-groupe d'un groupe G, le cardinal de l'ensemble quotient G/H (qui est égal au cardinal de $H\backslash G$) est appelé **l'indice** de H dans G. On le note

$$[G : H] := |G/H| \tag{3.7}$$

Lorsque G/H est un ensemble fini, on dit que H est **d'indice fini** dans G.

Par exemple, on a $[\mathbb{Z} : n\mathbb{Z}] = n$.

Théorème 3.10 (Théorème de Lagrange)**.** *Soit G un groupe fini et $H \leqslant G$ alors*

$$|G| = |H| \cdot [G : H].$$

En particulier, l'ordre de tout sous-groupe de G divise l'ordre de G, et l'ordre de tout élément de G divise l'ordre de G.

Démonstration. Comme $\equiv$ est une relation d'équivalence, G/H est une partition de G. On obtient alors

$$|G| = \sum_{xH \in G/H} |xH| = \sum_{xH \in G/H} |H| = |G/H|\,|H| = |H|\,[G : H],$$

car $|H| = |xH|$ pour tout $x \in G$ en vertue de la Proposition 3.6. Puisque l'ordre de $x \in G$ est l'ordre du sous-groupe $\langle x \rangle$, on obtient bien l'ordre de tout élément de G divise $|G|$. ■

Corollaire 3.11. *Pour G un groupe fini d'ordre n, alors $x^n = e$ pour tout $x \in G$. De plus, si p est premier, alors G est un groupe cyclique isomorphe à $\mathbb{Z}_p$.*

Démonstration. Soit $x \in G$, d'ordre d. Le théorème de Lagrange assure que d divise $|G| = n$. On a donc $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = d\,k$, et on a donc

$$x^n = x^{d\,k} = (x^d)^k = e^k = e.$$

La seconde partie est laissée en exercice. ■

Corollaire 3.12. *Si $\mathrm{Orb}(x)$ est fini, alors $\mathrm{Stab}(x)$ est d'indice fini et $|\,\mathrm{Orb}(x)\,| = [G : \mathrm{Stab}(x)]$. Si de plus G est fini, alors le cardinal de $\mathrm{Orb}(x)$ et de $\mathrm{Stab}(x)$ divisent le cardinal de G.*

Corollaire 3.13. *Soit G opérant sur E, où G et E sont finis. Soit $E = \mathrm{Orb}(x_1) \sqcup \ldots \sqcup \mathrm{Orb}(x_n)$, la partition de E en orbites pour cette action (voir (3.2)). Alors*

$$|\,E\,| = \sum_{i=1}^{n} [G : \mathrm{Stab}(x_i)].$$

Ce dernier corollaire est à la base de beaucoup d'applications des groupes finis. En particulier, on a la suivante. Pour l'action de G sur lui-même par conjugaison, on a la partition en orbites

$$G = \mathrm{Orb}(h_1) \sqcup \ldots \sqcup \mathrm{Orb}(h_r),$$

pour un bon choix de éléments $h_1, \ldots, h_r$. Notons que

$$h \in Z(G) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Orb}(h) = \{h\},$$

où on rappelle que $Z(G)$ désigne le centre de G. On obtient ainsi la formule suivante.

Corollaire 3.14. *Soit G un groupe fini et $C(g) = \mathrm{Stab}(g)$ le stabilisateur de $g \in G$ pour l'action de G sur G par conjugaison. Soit $h_1, \ldots, h_r \in G$ des représentants des orbites de cette action. Alors :*

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{h_i \notin Z(G)} [G : C(h_i)] \tag{3.8}$$

3.4.1 Une application : le système de cryptographie RSA

La généralisation suivante du petit théorème de Fermat [5] (due à Gauss [6]), se comprend bien du point de vue de la théorie des groupes. Ce n'est qu'un cas particulier du théorème de Lagrange. Comme on va le voir, le théorème rend possible [7] le système de cryptographie à clé publique « RSA ».

Théorème 3.15 (Fermat-Euler)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et a un entier premier avec n alors*

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

où φ est l'indicatrice d'Euler [8].

En effet, comme a est premier avec n, le sous-groupe $\langle a \rangle$ qu'il engendre dans $\mathbb{Z}_n^\times$ est un groupe multiplicatif d'ordre $\varphi(n)$. La conclusion est alors assurée par Lagrange.

Les systèmes de cryptographie à clé publique sont de grand intérêt dans le contexte des transactions informatiques. L'algorithme RSA [9] est le plus connu, et il très simple à décrire avec les outils dont nous disposons maintenant. La sécurité du système RSA est basée sur le fait que la puissance modulaire est très facile à calculer, mais très difficile à inverser. Cette dernière difficulté repose sur la difficulté (même avec des ordinateurs très puissants) de factoriser de très grands nombres en nombres premiers. Nous n'avons besoin que du lemme suivant.

Lemme 3.16. *Si $n = pq$ avec $p \neq q$ nombres premiers, alors $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$.*

Démonstration. En effet, $k \leqslant n$ n'est pas premier avec pq si et seulement si p ou q est diviseur de k. Donc $k \leqslant n$ est premier avec n si et seulement si p et q ne sont pas diviseurs de k. Donc $k \in \{ab \,|\, 1 \leqslant a < p, 1 \leqslant b < q\}$ de cardinal $(p-1)(q-1)$ est l'ensemble des nombres plus petits que n et premiers avec n, d'où le résultat. ∎

5. Pierre Fermat, 1601-1665.
6. Carl Friedrich Gauss (1777-1855).
7. Cela n'est qu'une de ses nombreuses applications.
8. Leonhard Euler, 1707-1783.
9. Rivest, Shamir et Adleman (1977).

Le système RSA. Chaque intervenant, on l'appelle souvent Bob, se construit une **clef publique**, c.-à-d. un couple d'entiers (n, e), de la manière suivante.

(a) En premier lieu, Bob se génère [10] un couple de très grands nombres premiers p et q, qu'il gardera secret. Bob restera donc le seul à connaître p et q. Et il calcule $n := pq$.

(b) Bob génère ensuite un troisième grand entier e quelconque, mais relativement premier à $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$. L'entier e est donc inversible dans $\mathbb{Z}_{\varphi(n)}$.

La clef publique (n, e) est alors partagée avec tous les autres intervenants (toujours en gardant p et q secret). Parmi ces autres intervenants se trouve Alice, qui cherchera à communiquer secrètement avec Bob. Pratiquement, il est impossible [11] de retrouver p et q à partir de n. Grâce à sa connaissance de p et q, Bob est en mesure de calculer facilement (avec l'algorithme d'Euclide) sa **clef privée**, c.-à-d. l'entier d tel que $\overline{d}$ est l'inverse de e dans $\mathbb{Z}_{\varphi(n)}$. Sans connaître p et q, la valeur de $\varphi(n)$ est « très » difficile à calculer (encore une fois dans un temps raisonnable), et c'est donc le cas aussi pour d. Voilà, tout est en place.

Chiffrement d'un message. Pour envoyer son message M (c'est un nombre plus petit que n) à Bob, Alice procède comme suit. Au moyen de la clef publique (n, e) de Bob, Alice calcule $C \equiv M^e \pmod{n}$. Cela peut se faire très efficacement et rapidement. Alice publie le message C à l'intention de Bob. Tous les intervenants connaissent la clé publique de Bob, et le message codé d'Alice.

Déchiffrement du message. Seul Bob peut déchiffrer le message C d'Alice. Il lui suffit de calculer C^d modulo n. Le Théorème d'Euler-Fermat assure que le résultat est bien M, le message original d'Alice.

Démonstration. En effet,

$$C^d \equiv (M^e)^d \equiv M^{ed} \equiv M \cdot M^{\varphi(n)k} = M \cdot (M^{\varphi(n)})^k \pmod{n}$$

car $ed \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$ ($\overline{e} = \overline{d}^{-1}$). Donc si M est premier avec n, en vertu du théorème

$$C^d \equiv M \pmod{n}.$$

Si M n'est pas premier avec n, puisque $M < n$, alors p divise M ou q divise M. Si p divise M alors

$$M^{ed} \equiv 0 \equiv M \pmod{p}.$$

10. Il existe des algorithmes "simples" et efficaces pour ce faire.

11. Ce n'est pas un théorème, mais on ne sait pas le faire dans un temps raisonnable (au moins quelques années), même avec les ordinateurs les plus puissants.

Si p ne divise pas M, alors le petit théorème de Fermat assure que

$$M^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \Longrightarrow M^{ed} \equiv M \cdot (M^{p-1})^{k(q-1)} \equiv M \pmod{p}.$$

En procédant de même avec q, on en déduit que p et q divisent $M^{ed} - M$ donc n aussi divise $M^{ed} - M$. D'où

$$C^d \equiv M^{ed} \equiv M \pmod{n}.$$

Puisque $M < n$, le résultat de ce calcul est M. ■

Exemple. En pratique, on s'attend à travailler avec de grands nombres premiers p et q comme les suivants :

$$\begin{aligned} p &= 6323829139021280799955082643342097928393309970508654992131084968361905198610474978033098 01 \\ q &= 5582183332721710984303341149394307079249672541973129902496045727580819388677553000169641 27. \end{aligned}$$

L'exposant e est lui aussi un grand nombre, comme

$$\begin{aligned} e &= 1506509050075534087481820828159849293596322698526815858095047097397384852311042480456938047100981883026555380108188664760543107881755421364073741062056055236872239468000258122420 19. \end{aligned}$$

Illustrons plutôt le processus avec de petits nombres comme $p = 7$ et $q = 13$. On a $n = 7 \cdot 13 = 91$, $\varphi(n) = (7-1)(13-1) = 72$;, et on peut choisir $e = 23$. Alors,

(a) La clef publique est $(91, 23)$.

(b) Après calcul, on trouve la clef privée est $d = 47$. En effet $23 \cdot 47 = 1 + 15 \cdot 72 \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$.

Supposons que le message est $M = 8$, alors le message crypté est $C = (M^e \bmod n) = (8^{23} \bmod 91) = 57$. Pour décoder le message, on trouve bien

$$(C^d \bmod n) = (57^{47} \bmod 91) = 8.$$

3.5 Formule de Burnside

Quand E et G sont finis, avec G agissant sur E, on s'intéresse souvent à calculer le nombre d'orbites de E pour cette action. Le lemme [12] de Burnside permet de transformer ce « difficile » calcul en un

12. Il n'est pas dû à William Burnside (1852–1927), qui l'a énoncé comme un lemme dans son livre : *The Theory of Groups of Finite Order*. Il semble plutôt dû à Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917), ou même à Augustin Louis Cauchy (1789 -1857) avant lui. Depuis lors, c'est le surnom qu'on donne couramment à cet énoncé.

calcul plus facile du nombre moyen d'éléments de E qui sont fixés par les éléments de G. On désigne $\mathrm{fix}_g(E)$, l'ensemble des **points fixés** par g dans E, c.-à-d.

$$\mathrm{fix}_g(E) := \{x \in E \mid g \cdot x = x\}.$$

On a alors l'énoncé suivant.

Théorème 3.17 (Lemme de Burnside-Cauchy-Frobenius)**.** *Pour toute action d'un groupe fini G, sur un ensemble fini E, on a*

$$|E/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\,\mathrm{fix}_g(E)\,|.$$

Démonstration. La preuve consiste simplement à calculer le cardinal de l'ensemble

$$|\,\{(g,x) \in G \times E \mid g \cdot x = x\}\,|,$$

de deux manières. D'abord,

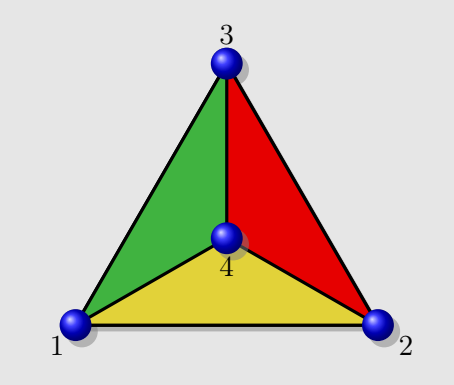
$$|\,\{(g,x) \in G \times E \mid g \cdot x = x\}\,| = \sum_{g \in G} |\,\mathrm{fix}_g(E)\,|.$$

Utilisant la première partie de la proposition 3.7, c.-à-d. $|G| = |\mathrm{Stab}(x)| \cdot |\mathrm{Orb}(x)|$, on trouve d'autre part

$$\begin{aligned}
|\,\{(g,x) \in G \times E \mid g \cdot x = x\}\,| &= \sum_{x \in E} |\mathrm{Stab}(x)| \\
&= \sum_{x \in E} \frac{|G|}{|\mathrm{Orb}(x)|} \\
&= |G| \sum_{\mathcal{O} \in E/G} \left(\sum_{x \in \mathcal{O}} \frac{1}{|\mathcal{O}|} \right) \\
&= |G| \sum_{\mathcal{O} \in E/G} 1, \\
&= |G| \cdot |E/G|.
\end{aligned}$$

Comparant les deux calculs, on trouve l'énoncé de la proposition. ∎

Un exemple typique est le suivant. On considère l'ensemble des colorations des faces d'un tétraèdre avec k couleurs, à symétries près du tétraèdre. Autrement dit, deux colorations sont considérées comme équivalentes si on peut passer de l'une à l'autre via une des symétries du tétraèdre. Si les sommets du tétraèdre sont étiquetés $\{1,2,3,4\}$, les faces s'identifient aux 4 sous-ensembles à trois éléments $A := \{1,2,3\}$, $B := \{1,2,4\}$, $C := \{1,3,4\}$, et $D := \{2,3,4\}$. Une coloration est une simplement une fonction $\{A,B,C,D\} \longrightarrow \{1,2\ldots,k\}$.



Coloration du tétraèdre.
(La face cachée est bleue)

Les symétries du tétraèdre correspondent exactement aux permutations de $\{A, B, C, D\}$, et l'action de $\sigma \in S_4$ sur une coloration f est de produire la nouvelle coloration

$$\sigma \cdot f : \{A, B, C, D\} \longrightarrow \{1, 2 \ldots, k\},$$

où $(\sigma \cdot f)(x) := f(\sigma^{-1}(x))$. La présence de l'inverse assure qu'on a bien une action, puisqu'on calcule que

$$\begin{aligned}(\tau \cdot (\sigma \cdot f))(x) &= (\sigma \cdot f))(\tau^{-1}(x)) \\ &= f(\sigma^{-1}(\tau^{-1}(x)) \\ &= f((\tau \circ \sigma)^{-1}(x) \\ &= (\tau \circ \sigma) \cdot f(x).\end{aligned}$$

Pour comprendre quand une coloration est fixée par une permutation, il suffit de considérer sa décomposition en cycles disjoints. En effet, toutes les faces qui sont dans le même cycle doivent être colorées de la même façon, et c'est la seule condition qui doit être satisfaite. Le nombre de colorations laissées fixes par une permutation est donc $k^{\gamma(\sigma)}$, où $\gamma(\sigma)$ est le nombre de cycles de γ (incluant les cycles de longueur 1). Rappelons que le type cyclique des permutations considérées est l'un des 5 partages de 4, et que le nombre de permutations ayant ces types respectifs sont : une permutation de type 1111 (qui fixe k^4 colorations), six permutations de type 211 (qui fixent k^3 colorations), trois permutations de type 22 (qui fixent k^2 colorations), huit permutations de type 31 (qui fixent k^2 colorations), et six de type 4 (qui fixent k colorations). En sommant pour les 5 termes, et divisant par 24, on trouve par le lemme de Burnside que le nombre de k-colorations à symétries près du tétraèdre est :

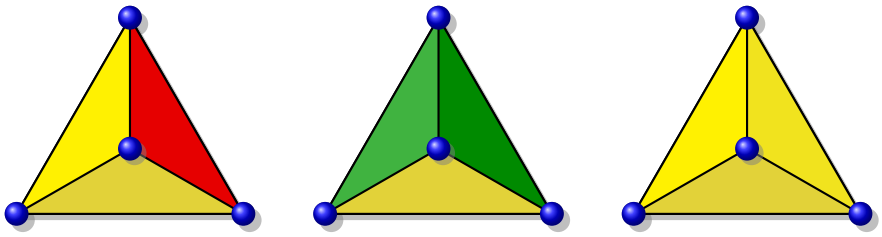


FIGURE 3.3 – Autres colorations possibles du tétraèdre (la face cachée aussi est colorée).

$$\frac{1}{24}(k^4 + 6\,k^3 + 3\,k^2 + 8\,k^2 + 6\,k) = \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{24} = \binom{k+3}{4}.$$

Les applications de ce genre mènent à la Théorie de Pólya[13], qui considère en général l'énumération des structures discrètes modulo l'action d'un groupe.

13. Le théorème de Pólya originellement dû à John Howard Redfield, a été redécouvert par George Polya (1887-1985) qui en a souligné les applications à la classification des isomères.

3.6 Exercices

Exercice 3.1. Montrer la Proposition 3.1.

Exercice 3.2. Soit

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} ; a, b, c \in \mathbb{R} \text{ et } ac \neq 0 \right\}$$

(a) Vérifier que G est un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$ et que G agit sur $\mathbb{R}$ par l'opération

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \cdot x = \frac{ax+b}{c}$$

(b) Déterminer l'orbite de 0 et le stabilisateur de 0 pour cette action.

Exercice 3.3. Montrer la Proposition 3.3.

Exercice 3.4. On considère le groupe symétrique S_3 et l'ensemble E des sous-groupe de S_3. Décrire les orbites et les stabilisateurs pour l'action par conjugaison et pour l'action par translation de S_3 sur E.

Exercice 3.5. On considère le groupe diédral $\mathcal{D}_4$ et l'ensemble E des sommets d'un carré. Décrire les orbites et les stabilisateurs pour l'action de $\mathcal{D}_4$ sur E.

Exercice 3.6. (**Classe de conjugaison de S_n**)

(a) Soit $\sigma \in S_n$ et $\alpha = (a_1, \ldots, a_k)$ un k-cycle. Montrer que $\sigma\alpha\sigma^{-1} = (\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_k))$ est un k-cycle.

(b) Montrer que $\alpha, \beta \in S_n$ sont conjugués si et seulement si pour tout k, α et β ont le même nombre de k-cycles dans leur décomposition en cycles disjoints.

(c) Pour une décomposition d'un entier n sous la forme d'une somme

$$n = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_k, \qquad \text{avec} \qquad \mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \ldots \geqslant \mu_k \geqslant 1,$$

on dit que $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k)$ est un **partage** de longueur k de n, et on écrit $\mu \vdash n$. Les μ_i sont les **parts** du partage μ. On désigne $p(n)$ le nombre de partages de n. Par exemple $p(4) = 5$, puisqu'on a les 5 décompositions de 4 suivantes :

$$4, \quad 3+1, \quad 2+2, \quad 2+1+1, \quad 1+1+1+1.$$

L'unique décomposition $\sigma = \gamma_1 \ldots \gamma_k$ d'une permutation $\sigma \in S_n$, en un produit de cycles disjoints γ_i, détermine un partage du nombre n, pour laquelle μ_i égal à la longueur de γ_i. Montrer que les classes de conjugaison du groupe S_n sont en bijection avec les partages de n.

(d) Montrer que le nombre de permutations, dans la classe de conjugaison qui correspond à un partage μ, est donné par la formule

$$\frac{n!}{1^{d_1} d_1!\ 2^{d_2} d_2! \cdots n^{d_n} d_n!} \tag{3.9}$$

où chaque $d_\ell = d_\ell(\mu)$ est le nombre de parts égale à ℓ dans μ.

Exercice 3.7. Soit G un groupe et $H \leqslant G$, montrer que

(a) si $x \in G$ alors $xH = H$ si et seulement si $x \in H$;

(b) si $x, y \in G$ alors $xH = yH \iff x^{-1}yH = H \iff y^{-1}xH = H \iff x^{-1}y \in H$;

(c) si G est abélien, alors $xH = Hx$ pour tout $x \in G$;

(d) si $x, y \in G$, alors $y \in xH \iff y^{-1} \in Hx^{-1}$;

(e) si $x \in H$, alors la fonction $h \mapsto xh$ est une bijection de H sur xH.

(f) En déduire que xH, H et Hx ont même cardinal.

Exercice 3.8. On considère $G = S_3$.

(a) Trouver tous les sous-groupes de S_3 ;

(b) Pour tous les sous-groupes H de S_3, calculer G/H.

Exercice 3.9. Montrer que le groupe alterné A_4 ne possède pas de sous-groupe d'ordre 6 (même si 6 est un diviseur de 12 qui est l'ordre de A_4).

Exercice 3.10. Soit G un groupe d'ordre p premier, montrer que G est cyclique.

Exercice 3.11. Soit G un groupe et H, K deux sous-groupes finis de G.

(a) Montrer que si $|H|$ et $|K|$ sont premiers entre eux, alors $H \cap K = \{e\}$.

(b) On pose $n = [H : H \cap K]$. Soit $\{x_i \,|\, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ un système de représentants des classes de $H/H \cap K$.

(i) Montrer que $\{x_i K \,|\, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ est une partition de HK.

(ii) Montrer que

$$|HK| = |KH| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}.$$

Exercice 3.12. Soit G un groupe. On considère l'action par conjugaison de G sur l'ensemble de ses sous-groupes. On note $N(H) = \mathrm{Stab}(H)$ le normalisateur de H qui est le stabilisateur de H pour cette action.

1. Soit $H \leqslant G$, montrer que $N(H) = G$ si et seulement si $H \lhd G$.
2. On suppose G fini. Montrer que le nombre de sous-groupes de G conjugués à H est égal à l'indice de H dans G et qu'il divise l'ordre de G. Que peut-on dire dans le cas où G est infini.

Exercice 3.13. Soit G un groupe abélien d'ordre $|G| = nm$ où n et m sont premiers entre eux. Soit H et K deux sous-groupes de G tel que $|H| = n$ et $|K| = m$. Montrer que $G \simeq H \times K$.

Exercice 3.14. Soit G un groupe et $H_1, \ldots, H_n$ des sous-groupes de G **d'indice fini**. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que l'indice du sous-groupe $\bigcap_{i=1}^{n} H_i$ est fini.

Exercice 3.15. Soit G un groupe et $x, y \in G$ d'ordre fini tel que $xy = yx$. Montrer que :

(a) xy est d'ordre fini ;

(b) si $\mathrm{ord}(x) = n$ et $\mathrm{ord}(y) = m$ sont premiers entre eux, alors $\mathrm{ord}(xy) = nm$.

Exercice 3.16. Un groupe d'ordre 35 opère sur un ensemble de cardinal 19. Combien y a-t-il d'orbites ? Cette action est-elle transitive ?

Exercice 3.17. (Formule de l'indice) Soit H un sous-groupe d'indice fini d'un groupe G et $K \leqslant H$. Le but de ce problème est de montrer que K est d'indice fini dans G si et seulement si il est d'indice fini dans H, ainsi que la formule suivante :

$$[G : K] = [G : H][H : K].$$

(a) Si $K \subseteq H$, notons $I \subseteq G$ un système de représentant des classes à gauche modulo H et $J \subseteq H$ un système de représentant des classes à gauche H/K modulo K. Montrer que

(i) $\Lambda = IJ$ est un système de représentant des classes G/K ;

(ii) Λ est en bijection avec $I \times J$.

(b) Montrer que $[G : K] = [G : H][H : K]$.

(c) En déduire que K est d'indice fini dans G si et seulement si il est d'indice fini dans H.

Exercice 3.18. Soit G un groupe fini non commutatif. On considère l'action de G sur lui-même par conjugaison.

1. Soit $g \in G$ tel que $g \notin Z(G)$, montrer que $Z(G) \subsetneq \mathrm{Stab}(g) \subsetneq G$.
2. En déduire que l'indice de $Z(G)$ est strictement plus grand que le plus petit nombre premier qui divise $|G|$.
3. Soit p un nombre premier. Montrer que le centre d'un groupe non-commutatif d'ordre p^3 est non trivial.

Exercice 3.19 (Le théorème de Wilson [14]). Cet exercice a pour but de proposer une preuve du théorème de Wilson qui exploite les notions de ce chapitre.

Théorème (Wilson) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, alors n est premier si et seulement si

$$(n-1)! \equiv -1 \pmod{n}.$$

(a) Pour p premier, montrer dans $\mathbb{Z}_p$ que $x = (p-1)!$ est le produit de tous les éléments du groupe abélien $\mathbb{Z}_p^\times$.

(b) Soit G un groupe abélien fini et x le produit des éléments de G.

(i) Si $|G|$ est impair, montrer que $x = e$;

(ii) si $|G|$ est pair et G ne contient qu'une involution alors montrer que x est cette unique involution ;

14. John Wilson (1741-1793).

(iii) si $|G|$ est pair et G contient plus d'une involution, montrer que $x = e$ (difficile).

(c) En déduire la preuve du théorème de Wilson.

Exercice 3.20. Soit G un groupe, E un G-ensemble et E' un G'-ensemble dont on note l'action $\bullet$. Soit $f : E \to F$ un morphisme de G-ensembles.

1. Montrer que si f est bijective, alors f^{-1} est aussi un morphisme de G-ensembles.
2. Soit $x \in E$, montrer que $\mathrm{Stab}(x) \subseteq \mathrm{Stab}(f(x))$. Quand y a t-il égalité ?
3. Soit $x \in E$, montrer que le G-ensemble $\mathrm{Orb}(x)$ est isomorphe au G-ensemble $G/\mathrm{Stab}(x)$.
4. Montrer que le G-ensemble E est transitif si et seulement si E est isomorphe à $G/\mathrm{Stab}(x)$ pour $x \in E$.

Exercice 3.21. Soit G et G' deux groupes. Soit E un G-ensemble et E' un G'-ensemble. On notera $G_x = \mathrm{Stab}_G(x)$ le stabilisateur de $x \in E$ dans G et $G'_y \mathrm{Stab}_{G'}(y)$ le stabilisateur de $y \in E'$ dans G'. On dit que le G-ensemble E et le G'-ensemble E' sont équivalent si il existe un isomorphisme de groupes $\theta : G \to G'$ et une bijection $f : E \to E'$ tel que

$$\theta(g) \cdot f(x) = f(g \cdot x), \quad \forall g \in G, \ \forall x \in E.$$

On suppose E et E' équivalent. Montrer que :

1. $G_x \simeq G'_{f(x)}$;
2. l'action de G sur E est transitive si et seulement si l'action de G' sur E' est transitive ;
3. l'action de G sur E est fidèle si et seulement si l'action de G' sur E' est fidèle.

Exercice 3.22 (Théorème de Cauchy). Soit G un groupe fini et p un nombre premier qui divise $|P|$. Le but de cet exercice est de démontrer le théorème de Cauchy : il existe un élément dans G d'ordre p.

On note $E = \{(g_1, \ldots, g_p) \in G^p \mid g_1 g_2 \ldots g_p = e\}$.

1. Montrer que E est en bijection avec G^{p-1}.
2. Pour $n \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{Z}_p$, on note $\rho_k(n)$ l'unique représentant de la classe de $n + k$ modulo p dans l'interval $[1, p]$. Montrer que l'application $\mathbb{Z}_p \times E \to E$ définie par $k \cdot (g_1, \ldots, g_p) = (g_{\rho_k(1)}, \ldots, g_{\rho_k(p)})$ une action de $\mathbb{Z}_p$ sur E.
   on note x le nombre d'orbites réduites à un élement et y le nombre d'orbite à p élements.
3. Montrer que $n^{p-1} = x + py$.
4. Conclure.

Exercice 3.23. Soit p un nombre premier et G l'ensemble suivant de matrices à coefficients dans $\mathbb{Z}_p$.

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z}_p \right\}$$

(a) Vérifier que G est un sous-groupe de $GL_3(\mathbb{Z}_p)$, qu'il a p^3 éléments, et qu'il n'est pas abélien.

(b) Vérifier que le centre de G est formé des matrices suivantes

$$C(G) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{Z}_p \right\}$$

Exercice 3.24. Soient A et B deux sous-groupes d'un groupe G. On considère l'action de B sur $\mathcal{P}(G)$ par translation à gauche. Montrez que $\mathrm{Stab}_B(A) = A \cap B$.

Exercice 3.25. Soit G un groupe d'ordre 33 et E un G-ensemble d'ordre 19. Montrer que cette action a au moint un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $x \in E$ tel que $g \cdot x = x$ pour tout $g \in G$. Même question avec G un groupe d'ordre 143 et E un G-ensemble d'ordre 108.

Exercices exploratoires

Exercice 3.26 (Représentations linéaires des groupes). Soit G un groupe et V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. On suppose que V est munit d'une structure de G-ensemble de morphisme associé $\rho : G \to S_V$. On dit que V est un G-module, ou de manière équivalente que ρ est une représentation de G sur V, si $\rho(G) \subseteq \mathrm{GL}(V)$. On suppose G fini d'ordre n, montrer que les valeurs propres de $\rho(g)$ sont toutes des racines $n$ième de l'unité.

Exercice 3.27. Si X est un espace topologique (voir Exercice 1.42), et G est un groupe topologique, on dit qu'on a une **action continue de groupes**

$$X \times G \to X,$$

si les fonctions $x \mapsto g \cdot x$ et $g \mapsto g \cdot x$ sont continues quelques soient $x \in X$ et $g \in G$.

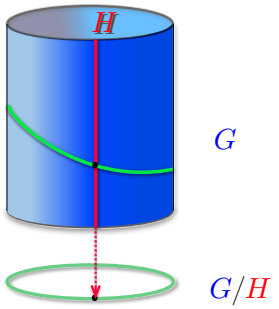
(a) Montrer que l'action usuelle de GL_n sur $\mathbb{R}_n$ est une action continue.

(b) Montrer que l'action par multiplication à gauche et l'action par conjugaison sont des actions continues d'un groupe topologique G sur lui-même.

(c) Décrire la notion d'isomorphisme pour les actions continues de groupes.

Chapitre 4

Groupes quotients, et théorèmes d'isomorphisme



Dans ce chapitre, nous allons développer d'autres outils importants pour la construction et l'étude de groupes, la notion de groupes quotients ; et le premier théorème d'isomorphisme. Nous généraliserons ainsi la construction de la structure de groupe sur le quotient $(\mathbb{Z}, +)$ par son sous-groupe $(n\mathbb{Z}, +)$. Nous montrerons alors que l'étude des groupes cycliques et monogènes se réduit à celle des groupes $(\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathbb{Z}_n, +)$.

4.1 Groupes quotients

Pour que l'ensemble quotient G/H admette une structure de groupe héritée de celle G, comme c'est le cas pour $\mathbb{Z}_n$ qui hérite la sienne de celle de $\mathbb{Z}$, il faut imposer à H certaines conditions. C'est la notion de « normalité ». Rappelons qu'un sous-groupe H d'un groupe G est dit normal si $xH = Hx$ pour tout $x \in G$ et que l'on note alors $H \lhd G$.

Attention, la relation « $\lhd$ » n'est pas transitive. Autrement dit, on peut avoir $K \lhd H$ et $H \lhd G$, sans que $H \lhd G$. On trouve un exemple de cette non-transitivité dans S_4 (voir exercice 4.3). Par contre, si K est sous-groupe de H, lui-même sous-groupe de G, alors

$$K \lhd G \quad \Longrightarrow \quad K \lhd H.$$

En effet, on a $xK = Kx$ pour tout $x \in G$ donc aussi pour tout $x \in H$. En sus de leurs intérêt dans la décomposition d'un groupe en produit semi-direct, l'intérêt principal des sous-groupes normaux est leur rôle dans la construction de « groupes quotients ».

Proposition 4.1. *Soit G un groupe, et N un sous-groupe normal de G, alors l'opération*

$$G/N \times G/N \longrightarrow G/N \qquad \text{telle que} \qquad (xN)\cdot(yN) := xyN \tag{4.1}$$

muni G/N d'une structure de groupe. On l'appelle le groupe **quotient** *de G par N. L'élément neutre est la classe à gauche N, et l'inverse de $x\,N$ est $(xN)^{-1} = x^{-1}N$. La fonction $\pi : G \to G/N$ définie en posant $\pi(x) = xN$ est un épimorphisme de groupes dit* **canonique**, *et son noyau est* $\ker(\pi) = N$.

Démonstration. En fait, le seul élément un peu moins évident dans la preuve de ce théorème est de montrer que le produit est **une application bien définie**, c.-à-d. que pour $xN, x'N, x'N, y'N$ tel que $xN = x'N$ et $yN = y'N$, il faut montrer que $xyN = x'y'N$. Puisque $N \lhd G$, on calcule que

$$x'y'N = x'Ny' = (x'N)y' = (xN)y' = xy'N = x(y'N) = xyN.$$

Le reste est ensuite direct. On a l'associativité, parce que

$$(xN \cdot yN)\cdot zN = (xyN)\cdot zN = (xy)zN = x(yz)N = xN\cdot(yN\cdot zN);$$

l'élément neutre est bien N, puisque

$$xN\cdot N = xN = N\cdot xN;$$

et l'inverse est bien celui qui été annoncé, puisque

$$xN\cdot x^{-1}N = xx^{-1}N = N = x^{-1}N\cdot xN.$$

Calculant que $\pi(xy) = xyN = xN\cdot yN = \pi(x)\cdot\pi(y)$, on constate que π est un morphisme de groupes, surjectif car $\pi(x) = xN$, pour tout $xN \in G/N$. De plus, on a déjà vérifié l'égalité suivante :

$$\{x \in G \,|\, xN = N\} = N = \ker(\pi).$$

Ce qui conclut la preuve. ∎

La proposition suivante souligne que les sous-groupes normaux coïncident avec les noyaux des morphismes de groupes.

Proposition 4.2. *Soit G un groupe et $H \leqslant G$, alors $H \lhd G$ si et seulement si il existe un morphisme de groupes $\theta : G \to G'$ tel que $H = \ker(\theta)$. En particulier, $\ker(\theta) \lhd G$, pour tout morphisme de groupes $\theta : G \to G'$.*

Démonstration. Si $H \lhd G$, il suffit de prendre $\theta = \pi : G \to G/H$. Réciproquement, on sait que le noyau de tout morphisme de groupes est normal dans G.

∎

Les groupes quotients permettent, entre autres, de faire des arguments par récurrence dans les groupes finis. Pour en donner un exemple, rappelons que l'ordre d'un élément x est le plus entier naturel n (s'il existe) tel que $x^n = e$, où e désigne l'élément neutre de G.

Proposition 4.3. *Si G est un groupe abélien fini dont tous les éléments ont une puissance de 3 comme ordre. Alors le cardinal de G est aussi une puissance de 3.*

Démonstration. On procède par récurrence $|G|$ sur le cardinal de G. Soit G tel que $\mathrm{ord}(g)$ est une puissance de 3, pour tout $g \in G$. Choisissons un élément $h \in G$, autre que e, ayant l'ordre $\mathrm{ord}(h) = 3^k$. Puisque $g \neq 0$, on a $k \neq 0$. Posons $H = \{e, h, \ldots, h^{3^k-1}\}$. Si $G = H$ alors on a fini, puisque $|G| = |H| = 3^k$. Autrement, on a $H \subset G$, avec $2 \leqslant |H| < |G|$. L'hypothèse de récurrence est que le résultat est vrai pour tous les groupes abéliens finis dont le cardinal est plus petit que $|G|$. Or, $|G/H| = |G|/|H|$ ce qui est plus petit que $|G|$, puisque $|H| \geqslant 2$. De plus, comme G est abélien, et donc H est normal, on a bien que G/H est un groupe abélien. Pour pouvoir utiliser l'hypothèse de récurrence, il faut vérifier que l'ordre de tout élément de G/H est une puissance de 3. À cette fin, considérons l'épimorphisme naturel $\pi : G \to G/H$, défini par $g \mapsto gH$. Par hypothèse, $g^{3^n} = e$ pour un certain n. On a alors $(gH)^{3^n} = g^{3^n}H = eH = H$, le neutre de G/H. En conséquence, 3^n est un multiple de $\mathrm{ord}(gH)$, et donc $\mathrm{ord}(gH)$ est une puissance de 3. L'hypothèse de récurrence s'applique donc àG/H, et $|G/H|$ est une puissance de 3. Disons $|G/H| = 3^\ell$. On calcule alors que

$$|G/H| = |G|/|H| = |G|/3^k = 3^\ell$$

ce qui entraîne $|G| = 3^{k+\ell}$, et donc que $|G|$ est une puissance de 3. Cela complète la récurrence. ∎

4.2 Théorème d'isomorphisme

Les « théorèmes d'isomorphisme » ont pour but de décrire la structure et les propriétés générales des morphismes de groupes. Ils en donnent des décompositions canoniques.

4.2.1 Premier théorème d'isomorphisme

Dans une terminologie moderne, on dit de l'énoncé suivant qui est la **propriété universelle du quotient de groupes**.

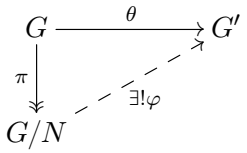
Théorème 4.4 (d'isomorphisme)**.** *Soit G un groupe, $N \lhd G$ et $\pi : G \to G/N$ la surjection canonique. Si $\theta : G \to G'$ est un morphisme de groupes tel que $N \subseteq \ker(\theta)$, alors il existe un unique morphisme $\varphi : G/N \to G'$ tel que $\theta = \varphi \circ \pi$. De plus*

(1) *si $N = \ker(\theta)$ alors φ est un monomorphisme ;*

(2) *si θ est un épimorphisme, alors φ l'est aussi.*

Plus spécifiquement, si θ est un épimorphisme, et $N = \ker(\theta)$, alors φ est un isomorphisme.

On peut formuler ce résultat en terme du diagramme commutatif suivant :



On déduit immédiatement le résultat suivant.

Corollaire 4.5. *Si $\theta : G \to G'$ est un morphisme de groupes, alors $G/\ker(\theta) \simeq \mathrm{Im}(\theta)$. En particulier, si G est fini on a $|G| = |\ker(\theta)| \cdot |\mathrm{Im}(\theta)|$.*

Démonstration. Exercice. ∎

Exemple. On sait que le groupe alterné $A_n = \ker(\varepsilon)$ est normal dans S_n et que l'application signature ϵ est surjective. Donc, en vertu du théorème d'isomorphisme, il existe un unique isomorphisme $\bar{\epsilon} : S_n/A_n \to \{\pm 1\}$ tel que $\epsilon = \bar{\epsilon} \circ \pi$. En particulier on obtient l'isomorphisme $S_n/A_n \simeq \mathbb{Z}_2$. On rappelle qu'en vertu du théorème de Lagrange, A_n est d'ordre $|A_n| = n!/2$.

Pour un autre exemple, on a $(\mathbb{C}/\mathbb{R}, +) \simeq (\mathbb{R}, +)$. En effet, on observe d'abord que $\mathbb{R} \lhd \mathbb{C}$, car $(\mathbb{C}, +)$ est abélien. De plus, on a un épimorphisme de groupes $\theta : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, défini par $\theta(a + ib) = b$. Son noyau est $\ker(\theta) = \mathbb{R}$. En vertu du théorème d'isomorphisme, il existe donc un unique isomorphisme $\varphi : \mathbb{C}/\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $\theta = \varphi \circ \pi$, comme annoncé.

Démonstration du théorème 4.4. L'unicité de φ se vérifie comme suit. Soit φ et φ', tels que $\theta = \varphi \circ \pi = \varphi' \circ \pi$. Pour $x \in G$ on a $\theta(x) = \varphi \circ \pi(x) = \varphi' \circ \pi(x)$, donc $\varphi(\pi(x)) = \varphi'(\pi(x))$. Donc pour tout $xN \in G/N$ on a $\varphi(xN) = \varphi'(xN)$, et donc $\varphi = \varphi'$.

Pour l'existence, on débute en montrant que la fonction $\varphi : G/N \to G'$, définie par $\varphi(xN) := \theta(x)$, est bien définie. Autrement dit, si $xN = yN$ alors on veut vérifier que $\theta(x) = \theta(y)$. Or, l'hypothèse implique que $x^{-1}yN = N$, et donc $x^{-1}y \in N \subseteq \ker(\theta)$. Il s'ensuit que $\theta(x^{-1}y) = e$. Puisque θ est un morphisme, il en découle que $\theta(x)\theta(y)^{-1} = e$, et donc que $\theta(x) = \theta(y)$. La fonction φ est donc bien définie. Pour le reste de l'énoncé du théorème, on montre d'abord que φ est un morphisme de groupes. En effet, pour $xN, x'N \in G/N$ on constate que

$$\varphi(xN \cdot x'N) = \varphi(xx'N) = \varphi \circ \pi(xx') = \theta(xx') = \theta(x)\theta(x') = \varphi \circ \pi(x)\varphi \circ \pi(x') = \varphi(xN)\varphi(x'N).$$

Maintenant, si pour tout $y \in G'$ on a $x \in G$ tel que $\theta(x) = y$ (θ est un épimorphisme), alors

$$\varphi(xN) = \varphi \circ \pi(x) = \theta(x) = y;$$

et donc φ est un épimorphisme. D'autre part, lorsque $N = \ker(\theta)$, on a $\ker(\varphi) = \{N\}$. En effet, si $\varphi(xN) = e$, alors $\theta(x) = e$ et donc $x \in N$; mais alors $x \in N$ et $xN = N$. On en conclut que φ est bien un monomorphisme. ■

4.2.2 Groupes monogènes et cycliques

Un autre des résultats fondamentaux de la théorie des groupes ramène l'étude des groupes abéliens aux groupes monogènes et cycliques. À leur tour, on montre que ceux-ci sont forcément, à isomorphisme près, soit $\mathbb{Z}$, soit $\mathbb{Z}_n$, pour $n \in \mathbb{Z}$. Plus précisément, on a le résultat suivant.

Proposition 4.6. *Soit $G = \langle x \rangle$ un groupe monogène, alors*

(1) *Si G est infini, alors $G \simeq (\mathbb{Z}, +)$.*

(2) *Si G est fini d'ordre n, alors $G \simeq (\mathbb{Z}_n, +)$.*

Démonstration. On considère $\theta : \mathbb{Z} \to G$ définie par $\theta(n) = x^n$. Alors θ est un morphisme de groupes et $\ker(\theta) = n\mathbb{Z}$ pour $n \in \mathbb{N}$, en vertu de la Proposition 1.6. Donc en vertu du théorème d'isomorphismes, $G \simeq \mathbb{Z}_n$. Puisque $n = |G| = |\mathbb{Z}_n| = n$, on en déduit le théorème. ■

Corollaire 4.7. *Tout sous-groupe d'un groupe cyclique est cyclique.*

Démonstration. Soit G un groupe cyclique, alors $G \simeq (\mathbb{Z}, +)$ ou $G \simeq (\mathbb{Z}_n, +)$. Les sous-groupes de G sont donc isomorphes à des sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ ou de $(\mathbb{Z}_n, +)$ qui sont tous cycliques. Donc par isomorphisme inverse, les sous-groupes de G sont cycliques (s'en convaincre en faisant l'exercice). ■

Exemples.

(a) Soit $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. On a $\mathbb{U} \leqslant (\mathbb{C}^*, \cdot)$ et $\mathbb{U} \simeq (\mathbb{R}, +)/2\pi\mathbb{Z}$.

(b) (Racines n-ième de l'unité) Soit $n \in \mathbb{N}$, on dit que $z \in \mathbb{C}$ est une **racine n^{e} de l'unité** si $z^n = 1$. On note $\mathbb{U}(n)$ l'ensemble des racines $n$ième de l'unité. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors $\mathbb{U}(n)$ est un sous-groupe cyclique fini de $\mathbb{U}$ isomorphe à $\mathbb{Z}_n$. Il est engendré par $e^{2i\pi/n}$.

4.2.3 Sous-groupes d'un groupe quotient

Pour mieux comprendre la structure du groupe quotient G/N, en particulier en ce qui concerne ses sous-groupes, la proposition suivante est fondamentale.

Proposition 4.8. *Soit G un groupe, $N \lhd G$ et $\pi : G \to G/N$ l'épimorphisme canonique. Alors la fonction $K \mapsto \pi(K)$ est une bijection de l'ensemble des sous-groupes de G contenant N sur l'ensemble des sous-groupes de G/N. De plus si K est un tel sous-groupe de G contenant N, alors $\pi(K) = K/N$. En particulier si G est fini, alors $|\pi(K)| = |K|/|N|$.*

Remarque. Autrement dit, $L \leqslant G/N$ si et seulement si il existe $N \leqslant K \leqslant G$ tel que $\pi(K) = L$. De plus, on a $N \lhd K$ (puisque $N \lhd G$), et donc un groupe quotient $K/N = L$. Notons aussi que pour $K = \langle S \rangle$, on a $\pi(K) = \langle \pi(S) \rangle$ (exercice).

Exemple. Les sous-groupes de $\mathbb{Z}_6$ sont donc les $\pi(\mathbb{Z}_k)$ où $6\mathbb{Z} \subseteq k\mathbb{Z}$. Donc, les seuls sous-groupes de $\mathbb{Z}_6$ sont donc : $\pi(\mathbb{Z}) = \langle \bar{1} \rangle = \mathbb{Z}_6$, $\pi(6\mathbb{Z}) = \{\bar{0}\}$, $\pi(3\mathbb{Z}) = 3\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \langle \bar{3} \rangle = \simeq \mathbb{Z}_2$ et $\pi(2\mathbb{Z}) = 2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \langle \bar{2} \rangle \simeq \mathbb{Z}_3$.

Démonstration. Soit $K \leqslant G$ contenant N. Pour voir que $\pi(K)$ est un sous-groupe de G/N, on observe d'abord $N \in \pi(K)$ car $N \subseteq K$ implique $\pi(N) = N \subseteq \pi(K)$. D'autre part, pour $xN, yN\pi(K)$ on a $x, y \in K$, et donc $xN(yN)^{-1} = xy^{-1}N = \pi(xy^{-1}) \in \pi(K)$. Il s'ensuit que $\pi(K) \leqslant G/N$. Autrement dit, la fonction $K \to \pi(K)$ est bien définie. Reste à montrer qu'elle est bijective.

Surjectivité : Soit $L \leqslant G/N$, posons $K = \pi^*(L) = \{g \in G \,|\, \pi(g) \in L\}$. Alors $e \in K$ car $\pi(e) = N \in L$. Si $x, y \in K$ alors puisque π est un morphisme de groupes on a $\pi(xy^{-1}) = \pi(x)\pi(y)^{-1} \in L$ car $L \leqslant G/N$, donc $xy^{-1} \in K$. Donc $K \leqslant G$. L'application est surjective.

Injectivité : Soit K, K' deux sous-groupes de G contenant N tel que $\pi(K) = \pi(K')$. Par symétrie, il suffit de montrer que $K \subseteq K'$ pour montrer que $K = K'$ et donc son injectivité. Soit $x \in K$ alors $\pi(x) \in \pi(K) = \pi(K')$. Donc $xN = yN$ avec $y \in K'$. Ce qui implique qu'il existe $h \in N$ tel que $x = yh$. Puisque $N \subseteq K'$, $y, h \in K'$. En outre, puisque $x = yh$ et $K' \leqslant G$, on obtient que $x \in K'$.

Maintenant, on sait que $\pi(K) \leqslant G/N$. Ainsi, en vertu du théorème d'isomorphisme que $\pi(K) \simeq K/N$ (exercice) ; et donc, par le théorème de Lagrange, $|\pi(K)| = |K|/|N|$ (exercice). Ceci mène à la formule

$$|G/N| = |G/K| \cdot |K/N|.$$

4.3 Présentations (finies) de groupes

Une autre conséquence des résultats précédents est de permettre les constructions suivantes. Comme l'illustrent les groupes engendrés par des réflexions, plusieurs groupes se décrivent naturellement en terme de générateurs et de relations. Plus explicitement, pour chaque ensemble fini S, on construit d'abord le **groupe libre** F_S sur l'ensemble S des **générateurs**.

4.3.1 Groupes libres

Soit S un ensemble fini et on considère alors une copie de S que l'on note $S^{-1} = \{s^{-1} \mid s \in S\}$. On appelle $A_S = S \sqcup S^{-1}$ un **alphabet** et on considère l'ensemble A_S^* des **mots sur l'alphabet** A_S, c'est-à-dire, l'ensemble des listes $(a_1, \ldots, a_k)$ où $a_i \in A_S$. On note un mot $a_1 \ldots a_k$ au lieu de

$(a_1, \dots, a_k)$. Alors A_S^* est un monoide engendré par A_S pour la concatenation des mots dont l'élément neutre est le mot vide δ (exercice).

Exemple. Si $S = \{s\}$, alors par exemple $ssss^{-1}s \in A_S^*$ est un mot qui est la concatenation de sss et de $s^{-1}s$. Si $S = \{a, b\}$ alors $ab^2a^{-3}b = abba^{-1}a^{-1}a^{-1}b$ est un mot qui est la concatenation de ab et $ba^{-3}b$.

On considère maintenant la plus petite relation d'équivalence $\sim$ sur A_S^* tel que

$$uaa^{-1}v \sim uv \sim ua^{-1}av,$$

pour tout $a \in A_S$ et $u, v \in A_S^*$. O note $[w]$ la classe d'équivalence de $w \in A_S^*$.

Théorème 4.9. *Soit S un ensemble fini non vide. L'ensemble quotient $F_S := A_S^*/\sim$ est un groupe infini pour la loi suivante héritée de la concatenation sur A_S^* :*

$$\begin{array}{ccc} F_S \times F_S & \longrightarrow & F_S \\ ([a_1 \dots a_k], [b_1 \dots b_l]) & \longmapsto & [a_1 \dots a_k b_1 \dots b_l]. \end{array}$$

L'élément neutre est $e = [\delta]$ et l'inverse de $[a_1 \dots a_k]$ est $[a_k^{-1} \dots a_1^{-1}]$.

Démonstration. Exercice 4.33. ∎

Définition. Le groupe $F_S := A_S^*/\sim$ est appelé le **groupe libre sur S**.

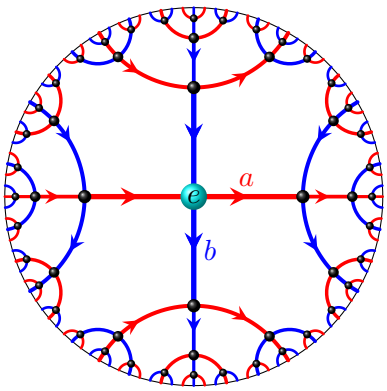


FIGURE 4.1 – Une portion du graphe de Cayley du groupe libre $F_{\{a,b\}}$.

Pour abus de notation, on notera une classe $[w]$ d'un mot w par un mot qui la représente, ce qui pourrait être w lui même. Les éléments de F_S sont donc les suites finies $x_1x_2 \cdots x_n$, de lettres où $x_i = s$ ou $x_i = s^{-1}$ pour $s \in S$; avec la condition que $x_i \neq x_{i+1}^{-1}$. Autrement dit, deux lettres consécutives dans le « mot » $x_1x_2 \cdots x_n$ ne sont pas l'inverse l'une de l'autre. Le produit de deux suites $\alpha = x_1x_2 \cdots x_n$ et $\beta = y_1y_2 \cdots y_k$ s'obtient simplement par concaténation de celles-ci : $\alpha \cdot \beta := x_1x_2 \cdots x_n\, y_1y_2 \cdots y_k$, modulo les simplifications nécessaires, dues au fait que les dernières lettres de α et les premières de β sont telles qu'on doive simplifier. Ces simplifications s'effectuent en effaçant (récursivement) deux lettres consécutives, si elles sont l'inverse l'une de l'autre. Ainsi, on a

$$\begin{array}{rcl} (ababb^{-1}a^{-1}b) \cdot (b^{-1}ababaa^{-1}b) & = & ababb^{-1}a^{-1}\, bb^{-1}\, ababaa^{-1}b \\ & = & ababb^{-1}\, a^{-1}a\, babaa^{-1}b \\ & = & abab\, b^{-1}b\, abaa^{-1}b \\ & = & abababaa^{-1}b. \end{array}$$

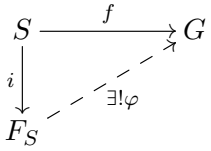
Exemple. (a) Si $S = \{s\}$, alors par exemple $ssss^{-1}s = s^3$ dans F_S. En fait, $F_S = \langle s \rangle$ est monogène infini et donc $F_S \simeq \mathbb{Z}$.

(b) Si $S = \{a, b\}$ alors $ba^2a^{-3}b = ba^{-1}b$ est un mot qui est la concatenation de ba et $a^{-2}b$. De plus

$$F_{\{a,b\}} = \{e, a, a^{-1}, b, b^{-1}, ab, ba, ab^{-1}, b^{-1}a, a^{-1}b, ba^{-1}, a^{-1}b^{-1}, b^{-1}a^{-1}, aba, \ldots\}.$$

4.3.2 Propriété universelle des groupes libres et présentation par générateur et relation

Théorème 4.10. *Soit S un ensemble fini non vide, G un groupe et $f : S \to G$ une application. Alors il existe un unique morphisme de groupes φ tel que le diagramme suivant soit commutatif :*



où i est l'injection canonique de S dans F_S. De plus, si $G = \langle f(S) \rangle$ alors φ est surjective.

Démonstration. Exercice 4.33. ■

En particulier, ce théorème signifie que $\varphi(x_1 \ldots x_k) = f(x_1) \ldots f(x_k)$, pour tout $x_i \in A_S$.

Exemple. On considère $G = \mathcal{D}_m$ le groupe diédral engendré par une réflexion s et la rotation r d'ordre m, où $m \geqslant 2$. On pose $S = \{a, b\}$. Alors on a une application $f : S \to G$ définit par $f(a) = s$ et $f(b) = r$. Donc $G = \langle f(S) \rangle$. Par la propriété universelle des groupes libres, il existe un unique morphisme de groupes surjectif $\varphi : F_S \to G = \mathcal{D}_m$.

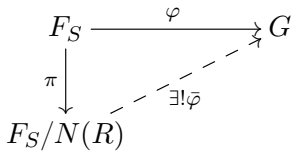
Corollaire 4.11. *Tout groupe G engendré par une partie finie S est le groupe quotient d'un groupe libre.*

Démonstration. Il suffit de considérer f comme l'injection canonique de S dans F_S. ■

Corollaire 4.12. *Soit S un ensemble fini non vide et G un groupe.*

1. *Soit $\varphi : F_S \to G$ un morphisme de groupes, $R \subseteq F_S$ et $N(R)$ le plus petit sous-groupe normal contenant R (c'est-à-dire l'intersection de tous les sous-groupes normaux dans F_S qui contiennent S). Si $R \subseteq \ker \varphi$. Alors il existe un unique morphisme de groupes $\bar{\varphi}$ tel que le diagramme suivant*

soit commutatif :



De plus, $\bar{\varphi}$ est surjective si φ est surjective et $\bar{\varphi}$ est injective si $N(R) = \ker(\varphi)$.

2. *Si $G = \langle S \rangle$ alors il existe un unique morphisme surjectif de groupes $\varphi : F_S \to G$ tel que $\varphi(s) = s$ pour tout $s \in S$. De plus, si $R \subseteq \ker \varphi$, alors il existe un unique morphisme de groupes $\bar{\varphi} : F_S/N(R)$ tel que $\bar{\varphi}(sN(R)) = s$. De plus si $\ker \varphi = N(R)$ alors $\bar{\varphi}$ est un isomorphisme.*

Démonstration. L'énoncé est un corollaire du théorème ci-dessus, ainsi que du premier théorème d'isomorphisme (car si $R \subseteq \ker \varphi$, le plus petit sous-groupe normal contenant R est forcément contenu dans le sous-groupe normal $\ker \varphi$). ■

Le deuxième énoncé du corollaire précédent motive la définition de présentation par générateurs et relations.

Définition. Une **présentation** d'un groupe G est la donnée d'un ensemble de générateur S de G est d'un ensemble dit de **relations** $R \subseteq F_S$ de G tel que $G \simeq F_S/N(R)$. Dans ce cas on note $G = \langle S \mid R \rangle$.

Exemples. (a) En poursuivant l'exemple précédent de $G = \mathcal{D}_m$, on voit que $R = \{a^2, b^m, abab\} \subseteq \ker \varphi$. On peut en fait montrer que $R = \{a^2, b^m, abab\} \subseteq \ker \varphi$ (exercice 4.21). Donc le groupe diédral $\mathcal{D}_m$ admet la présentation $\mathcal{D}_m := \langle r, s \mid r^m,\ s^2,\ (r\,s)^2 \rangle$.

(b) On a aussi les présentations suivantes (exercices) :

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_m &= \langle s, t \mid s^2, t^2, (st)^m \rangle \\
\mathbb{Z}_n &= \big\langle\, z \mid z^n \,\big\rangle, \\
\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) &= \big\langle\, s, r \mid s^4,\ r^6 \,\big\rangle, \\
S_n &= \big\langle\, s_1, \ldots, s_{n-1} \mid s_i^2,\ (s_i s_{i+1})^3,\ (s_i s_j)^2 \text{ pour } |i-j| > 1 \,\big\rangle, \\
A_n &= \big\langle\, c_1, \ldots, c_{n-2} \mid c_i^3,\ (c_i c_j)^2 \text{ pour } i \neq j \,\big\rangle.
\end{aligned}$$

(c) Un même groupe peut avoir plusieurs présentations. Par exemple, on a

$$A_5 = \big\langle\, a, b \mid a^2,\ b^3,\ (ab)^5 \,\big\rangle = \big\langle\, c, d \mid c^2,\ d^4,\ (cd)^5,\ (c^{-1}d^{-1}cd)^3 \,\big\rangle.$$

Remarque. (a) Bien qu'on écrive les relations comme un ensemble constitué de mots α dans F_S, il faut les interpréter comme des identités $\alpha = e$ pour α vu dans G via $\bar{\varphi}$. Techniquement donc, on se donne R un sous-ensemble fini de F_S, en comprenant que $\alpha \in R$ correspond à l'identité $\alpha = e$.

(b) Une façon de « construire » $N(R)$ est de considérer le sous-groupe engendré par tous les conjugués $\gamma^{-1}\alpha\gamma$, pour α dans R et γ dans F_S.

(c) On a souvent des relations qui font intervenir le **commutateur**, $[a,b] := a^{-1}b^{-1}ab$, de deux éléments. On observe que

$$[a,b] = e \quad \text{ssi} \quad a^{-1}b^{-1}ab = e \quad \text{ssi} \quad ab = ba,$$

ce qui explique la terminologie. On peut montrer que tout groupe fini admet une présentation finie. Bien qu'on puisse parfois déterminer l'ordre d'un groupe à partir de sa présentation, c'est souvent un problème difficile. En fait le **problème du mot**, qui consiste à déterminer si deux mots donnent le même élément du groupe, est un problème **indécidable**. Informellement, cela signifie qu'il n'existe pas d'algorithme qui permette de décider (en toute généralité) si deux mots sont égaux. C'est le théorème de Novikov [1]. Cependant, on peut déterminer certaines classes de présentations de groupes pour lesquelles le problème du mot est décidable.

4.4 Exercices

Exercice 4.1. Soit G un groupe et $H \leqslant G$ d'indice 2, montrer que H est normal dans G.

Exercice 4.2. Soit G un groupe et $S \subseteq G$. Posons $H = \langle S \rangle$.

(a) Montrer que si $xSx^{-1} \subseteq H$ pour tout $x \in G$, alors $H \lhd G$.

(b) Si $f : G \to G'$ est un morphisme de groupes, montrer que $f(H) = \langle f(S) \rangle$.

Exercice 4.3. Dans le groupe symétrique S_4, on considère

$$H = \langle (1,2)(3,4) \rangle \quad \text{et} \quad K = \{e, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\}.$$

(a) Vérifier que $K = \langle (1,2)(3,4), (1,3)(2,4) \rangle$.

(b) Montrer que $H \lhd K$ et $K \lhd S_4$, mais que H n'est pas normal dans S_4.

Exercice 4.4. Trouver tous les sous-groupes de S_3, et déterminer ceux qui sont normaux.

Exercice 4.5. Soit G un groupe et $H, K \leqslant G$, montrer que

(a) si $H \lhd G$ et $K \leqslant G$ contenant H alors $H \lhd K$;

(b) $H \lhd G \Longrightarrow H \cap K \lhd G$;

(c) En déduire que l'intersection de sous-groupes normaux de G est un sous-groupe normal de G.

Exercice 4.6. Soit G un groupe et $H, K \leqslant G$.

(a) Montrer que $HK \leqslant G \iff HK = KH$.

(b) Montrer que si $HK \leqslant G$ alors $HK = \langle H \cup K \rangle$. Est-ce que dans ce cas HK est abélien ?

(c) Montrer que si $H \lhd G$ alors $HK \leqslant G$ et $H \lhd HK$.

1. Voir Petr Novikov (1901-1975)

Exercice 4.7. Soit G un groupe et H un sous-groupe normal de G d'indice n. Montrer que pour tout $a \in G$, $a^n \in H$. Donner un exemple de sous-groupe H non normal d'un groupe G pour lequel l'énoncé précédent est faux.

Exercice 4.8. Soit $\theta : G \to G'$ un morphisme de groupes, montrer que

(a) si $H \lhd G$ alors $\theta(H) \leqslant \theta(G)$, et que si θ est surjectif alors $\theta(H) \lhd G'$. Est-ce vrai dans le cas où θ n'est pas surjectif ?

(b) Si $H' \lhd G'$ alors $\theta^{-1}(H') \lhd G$.

Exercice 4.9. Soit G un groupe, montrer que si $G/Z(G)$ est un groupe monogène, alors G est abélien. En déduire que tout groupe d'ordre p^2 est commutatif (on pourra utiliser l'exercice 3.18).

Exercice 4.10. Justifier les isomorphismes suivants :

(a) $(\mathbb{C}/\mathbb{R}, +) \simeq (\mathbb{R}, +)$;

(b) $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, +) \simeq (\mathbb{U}, \cdot)$;

(c) $(\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^{+*}, \cdot) \simeq (\mathbb{U}, \cdot)$;

(d) $(\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^*, \cdot) \simeq (\mathbb{U}, \cdot)$;

(e) $(\mathbb{U}/\mathbb{U}(n), \cdot) \simeq (\mathbb{U}, \cdot)$;

(f) $(\mathbb{C}^*/\mathbb{U}(n), \cdot) \simeq (\mathbb{C}^*, \cdot)$.

Exercice 4.11. Si $\theta : G \to G'$ est un morphisme de groupes, montrer que $G/\ker(\theta) \simeq \mathrm{Im}(\theta)$. Si G est fini, en déduire que $|G| = |\ker(\theta)| \cdot |\mathrm{Im}(\theta)|$

Exercice 4.12. Soit H, K des groupes et $G = H \times K, A = \{e_H\} \times K$ et $B = H \times \{e_K\}$. Vérifiez que $A \lhd G, B \lhd G$, et que G/A est isomorphe à H et G/B isomorphe à K.

Exercice 4.13. Soit G un groupe abélien fini dont tous les éléments sont une puissance de p premier. Montrer que $|G|$ est une puissance de p.

Exercice 4.14. Soit G un sous-groupe d'indice fini dans $(\mathbb{C}^*, \cdot)$, montrer que $G = (\mathbb{C}^*, \cdot)$ (on pourra utiliser l'exercice 4.7).

Exercice 4.15. Soit $G_1, \ldots, G_n$ des groupes. Pour $1 \leqslant i \leqslant n$ on considère H_i un sous-groupe de G_i.

(a) Montrer que le produit direct $H_1 \times \cdots \times H_n$ est un sous-groupe de $G_1 \times \cdots \times G_n$, qui est normal si chacun des H_i l'est.

(b) Montrer que $(G_1 \times G_2)/(H_1 \times H_2) \simeq (G_1/H_1) \times (G_2/H_2)$.

Exercice 4.16. On considère le groupe diédral $\mathcal{D}_{2m}$, $m \geqslant 2$ d'ordre $4m$. On considère une rotation $r \in \mathcal{D}_{2m}$ d'ordre m et $H = \langle r \rangle$. Montrer que $H \lhd \mathcal{D}_m$ et donner tous les sous-groupes de $\mathcal{D}_m/H$.

Exercice 4.17. Soit $n \in \mathbb{N}$ et d qui divise n.

(a) Montrer qu'il existe un morphisme de groupes injectif $\iota : (\mathbb{Z}_d, +) \to (\mathbb{Z}_n, +)$.

(b) Montrer qu'il existe un morphisme de groupes surjectif $\varphi : (\mathbb{Z}_n, +) \to (\mathbb{Z}_d, +)$.

Exercice 4.18. Soit G un groupe, $H \lhd G$ et K est un sous-groupe de G contenant H. On note $\pi : G \to G/H$ le morphisme surjectif canonique. Montrer que

(a) $\pi(K) \simeq K/H$;

(b) si $K = \langle S \rangle$ alors $\pi(K) = \langle \pi(S) \rangle$;

(c) si K est fini, alors $|\pi(K)| = |K|/|H|$.

Exercice 4.19. Donner tous les sous-groupes de $(\mathbb{Z}_{20}, +)$.

Exercice 4.20. (Deuxième et troisième théorèmes d'isomorphisme)

Soit G un groupe et $H \lhd G$ et $K \leqslant G$.

(a) Montrer que $H \cap K \lhd G$ et $K/(K \cap H) \simeq HK/H$.

(b) Si de plus $K \lhd G$ et $K \subseteq H$, montrer que $H/K \lhd G/K$ et $(G/K)/(H/K) \simeq G/H$.

Indice : Se servir du premier théorème d'isomorphisme.

Exercice 4.21. Montrer que $\mathcal{D}_m = \langle s, r \mid s^2, r^m, srsr \rangle$, où $m \geqslant 2$.

Exercice 4.22. Soit $m \geqslant 2$.

(a) Montrer que $\mathcal{D}_m = \langle s, t \mid s^2, t^2, (st)^m \rangle$.

(b) Soit G un groupe fini engendré par deux involutions distinctes. Montrer que 2 divise $|G|$ et que $|G| = 2m$. Montrer que $G \simeq \mathcal{D}_m$, le groupe diédral d'ordre $2m$. Qu'en est-il si G est infini ?

Exercice 4.23. Soit A et B deux ensemble en bijection, montrer que $F_A \simeq F_B$.

Exercice 4.24. Montrer que $\mathbb{Z}_n = \langle a \mid a^n \rangle$, où $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4.25. Montrer que S_4 est isomorphe à $G = \langle a, b \mid a^4, b^2, (ab)^3 \rangle$, où $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4.26. Soit G un groupe fini opérant sur un ensemble E. Montrez que si G n'est pas isomorphe au groupe additif $\mathbb{Z}_2$ et que E possède un élément dont l'orbite possède exactement deux éléments, alors G possède au moins un sous-groupe normal propre.

Exercice 4.27. Soit G un groupe fini et H un sous-groupe normal de G d'ordre k. On suppose que $[G : H]$ et k sont premiers entre eux. Montrer que H est l'unique sous-groupe de G d'ordre k.

Exercice 4.28. Soit G un groupe, H un sous-groupe normal de G et K un sous-groupe de G. On suppose que $[G : H]$ et $|K|$ sont premiers entre eux. Montrer que $K \subseteq H$.

Exercice 4.29. Soit G un groupe dont l'élément neutre est noté e. On note $Z(G)$ le centre de G. Le *commutateur de* $x, y \in G$, noté $[x, y]$ est l'élément de G définit par $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$. Le *groupe dérivé* de G est le sous-groupe $[G, G]$ de G engendré par les commutateurs de G :

$$[G, G] = \langle [x, y] \mid x, y \in G \rangle.$$

(a) Montrer que G est abélien si et seulement si $[G, G] = \{e\}$.

(b) Montrer que $[G, G] \lhd G$.

(c) Soit $H \lhd G$ tel que $H \cap [G,G] = \{e\}$, montrer que $H \subseteq Z(G)$.

(d) Soit $H \lhd G$, montrer que G/H est abélien si et seulement si $[G,G] \subseteq H$.

Exercice 4.30. Soit G, G' deux groupes finis. On note $\delta : G \to G'$ le morphisme trivial, c'est-à-dire, $\delta(g) = e_{G'}$ pour tout $g \in G$.

(a) Montrer que si $|G|$ et $|G'|$ sont premiers entre eux, alors $\mathrm{Hom}(G,G') = \{\delta\}$.

(b) Montrer que tout morphisme de groupes de $G = S_3$ dans $G' = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ est trivial.

Exercices exploratoires

Exercice 4.31 (Groupes alternés simple). Le but de ce problème est de montrer que le groupe alterné A_n est simple si et seulement si $n \geqslant 5$. Soit C_r l'ensemble des cycles de longueur r dans S_n.

(a) Montrer que A_3 est simple et que A_4 n'est pas simple.

(b) Montrer que S_n agit transitivement par conjugaison sur C_r pour tout $2 \leqslant r \leqslant n-2$.

(c) Montrer que A_n agit transitivement par conjugaison sur C_r si $2 \leqslant r \leqslant n-2$.

(d) Montrer que A_n est engendré par les cycles de longueur 3.

(e) On suppose à partir de maintenant que $n \geqslant 5$. On considère un sous-groupe normal H de A_n non réduit à l'identité. Montrer que si H contient un cycle de longueur 3 alors $H = A_n$.

(f) En conclure que A_n est simple.

Exercice 4.32 (Groupes résolubles). Un groupe G est dit **résoluble** s'il existe une chaîne de groupes

$$\{e\} = G_0 \lhd G_1 \lhd G_2 \lhd \cdots \lhd G_n = G,$$

où chaque G_i est un sous-groupe normal de G_{i+1} et G_{i+1}/G_i est abélien. On dit alors que la chaîne ci-haut est une résolution du groupe G.

Remarque. En théorie de Galois, on associe à chaque polynôme un groupe fini, et on montre qu'il existe une formule par radicaux pour les racines du polynôme si et seulement si le groupe du polynôme est résoluble. On montre aussi qu'il y a des polynômes pour lesquels le groupe de Galois associé est A_n. Il s'ensuit qu'il n'existe pas de formule par radicaux donnant les racines d'un polynôme de degré plus grand ou égal à 5. On connaît de telles formules pour les degrés 2, 3 et 4. Un autre aspect intéressant de la théorie de Galois est qu'une résolution du groupe de Galois d'un polynôme donne une façon explicite de calculer ses racines. On a donc ainsi des résultats positifs, pour les polynômes dont le groupe est résoluble. En particulier, on peut trouver ainsi les formules générales pour les polynômes de degré 3 et 4. Tout cela est au menu du cours Théorie de Galois.

(a) Montrer que les groupes abéliens sont résolubles.

(b) Montrer que si G est résoluble, alors tout les sous-groupes et tous les quotients de G sont résolubles.

(c) Le *commutateur de* $x, y \in G$, noté $[x, y]$ est l'élément de G définit par $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$. Le *groupe dérivé* de G est le sous-groupe $D(G)$ de G engendré par les commutateurs de G :

$$D(G) = \langle [x, y] \mid x, y \in G \rangle.$$

Le $i$ème groupe dérivée de G est définit par récurrence de la façon suivante : $D_1(G) = D(G)$ et $D_i(G) = D(D_{i-1}(G))$ pour $i \geqslant 2$.

(i) Montrer que $D_i \lhd D_{i+1}$ et que D_{i+1}/D_i est abélien.

(ii) Montrer que G est réoluble si et seulement si il existe $n \geqslant 1$ tel que $D_n(G) = \{e\}$.

(d) Montrer que si G est fini, G est résoluble si et seulement si il existe une chaine de résolution du groupe G dont tous les quotients sont cycliques d'ordre premier.

(e) Montrer que les seuls groupes simples résolubles sont les groupes cycliques d'ordre premier.

(f) Montrer que S_n n'est pas résoluble si $n \geqslant 5$.

Exercice 4.33. Soit S un ensemble fini.

(a) Montrer qu'il existe un unique mot de A_S^* de longueur minimale dans chaque classe d'équivalence pour la relation $\sim$.

(b) Montrer le Théorème 4.9.

(c) Montrer le Théorème 4.12.

(d) Montrer que tout sous-groupe d'un groupe libre est isomorphe à un groupe libre.

Exercice 4.34 (Une présentation du groupe symétrique). Soit $n \geqslant 2$ un entier. On note $\tau_i = (i\, i+1)$ la transposition simple qui échange i et $i+1$, pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$. Le but de ce problème est de montrer que le groupe symétrique S_n admet la présentation suivante :

$$S_n = \langle \tau_1, \ldots, \tau_{n-1} \mid \tau_i^2,\ (\tau_i\tau_j)^2,\ (\tau_i\tau_{i+1})^3,\ |i-j| > 1 \rangle.$$

(a) Soit $S = \{a_1, \cdots, a_{n-1}\}$ un alphabet à $n-1$ lettres. Montrer qu'il existe un morphisme de groupe surjectif φ du groupe libre F_S dans S_n qui envoie a_i sur la transposition simple τ_i pour tout $1 \leqslant i < n$. Montrer que les relations vérifient

$$R = \{a_i^2,\ (a_ia_j)^2,\ (a_ia_{i+1})^3,\ |i-j| > 1\} \subseteq \ker\varphi.$$

En déduire l'existence d'un morphisme de groupe surjectif $\overline{\varphi}$ de $G_n := F_S/N(R)$ dans S_n.

(b) Montrer par récurrence sur n que $|G_n| \leqslant n!$.

Indication : On pourra regarder $G_{n-1} \leqslant G_n$ et considérer les éléments $y_0 = e$, $y_1 = a_{n-1}$, $y_i = a_{n-i} \cdots a_{n-1}$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$. On montrera alors que G_n est l'union des y_iG_{n-1}.

(c) En déduire que $S_n \simeq G_n = \langle S \mid a_i^2,\ (a_ia_j)^2,\ (a_ia_{i+1})^3,\ |i-j| > 1 \rangle$.

(d) Conclure.

Exercice 4.35. Les **groupes de Coxeter** sont les groupes qui admettent une présentations $W = \langle S \mid R \rangle$, avec les relation dans R de la forme $(st)^{m(s,t)}$ pour toute paire s, t d'éléments de S. On demande que les $m(s,t)$ soient des entiers ; et que

(1) $m(s,s) = 1$,

(2) $m(s,t) \geqslant 2$ si s est différent de t,

(3) $m(s,t) = m(t,s)$.

Pour que le groupe W soit fini, il y a de fortes contraintes sur les entiers $m(s,t)$, et Coxeter a pu classifier toutes les possibilités de tels groupes qui soient irréductibles pour le produit (voir exercice (b) et (c)). Montrer que :

(a) Deux générateurs s et t commutent si et seulement si $m(s,t) = 2$.

(b) Si $S = S_1 + S_2$ avec $m(s_1, s_2) = 2$ pour tout $s_1 \in S_1$ et $s_2 \in S_2$, alors

$$W = W_1 \times W_2,$$

pour $W_1 = \langle S_1 \mid R_1 \rangle$ et $W_2 = \langle S_2 \mid R_2 \rangle$, avec des choix judicieux de R_1 et R_2.

(c) Si W_1 et W_2 sont deux groupes de Coxeter, alors on peut présenter $W_1 \times W_2$ comme un groupe de Coxeter.

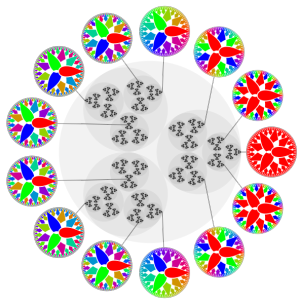
(d) Les groupes diédraux sont des groupes de Coxeter.

(e) Le groupe symétrique S_n est un groupe de Coxeter.

(f) Le groupe de Coxeter avec 3 générateurs s, t, r et les relations $m(s,r) = 3$, $m(r,t) = 3$ et $m(s,t) = 3$ est infini.

Chapitre 5

Les p-groupes, et théorèmes de Sylow



Les théorèmes de Sylow [1] permettent de prédire l'existence de certains sous-groupes dans un groupe fini, seulement en considérant le cardinal du groupe. En particulier, les théorèmes de Sylow sont un premier outil de détection de sous-groupes normaux dans un groupe fini, et ainsi un premier outil de classification des groupes simples.

5.1 Les p-groupes

Un **p-groupe fini** est un groupe fini qui possède p^n éléments où $n \in \mathbb{N}$ et p est un nombre premier.

Proposition 5.1. *Soit G un p-groupe.*

1. *Tout sous-groupe de G est un p-groupe.*
2. *Si G n'est pas le groupe trivial alors son centre n'est pas non plus trivial.*
3. *Si G est d'ordre p ou p^2, alors G est abélien et isomorphe à $\mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Z}_{p^2}$ ou $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$.*

Démonstration. (1) est une conséquence du théorème de Lagrange. (2) Voir Exercice 3.18. (3) Le fait que un groupe d'ordre p ou p^2 est abélien est l'exercice 4.9. On sait déjà qu'un groupe d'ordre p est isomorphe à $\mathbb{Z}_p$. On considère G d'ordre p^2. Si il existe dans G un élément d'ordre p^2 alors G est cyclique d'ordre p^2. Donc G est isomorphe à $\mathbb{Z}_{p^2}$. Si il n'existe pas d'élément d'ordre p^2 dans G alors,

1. Ludwig Sylow, (1832-1918).

en vertu du théorème de Lagrange, tous les éléments de G sauf e sont d'ordre p. Soit $x \in G$ d'ordre p, on note $H = \langle x \rangle$. Soit $y \in G \backslash H$. On note $K = \langle y \rangle$. On note que tous les éléments de H et K différent du neutre sont d'ordre p. Soit $z \in H \cap K$. Alors $z = x^k = y^l$ avec $1 \leqslant k, l \leqslant p$. Si $l = k = p$ alors $z = e$. Si $k \neq p$ alors $y \neq e$ et $y^l \in H$. Comme y^l est d'ordre p on en déduite que $K = \langle y^l \rangle = H = \langle x^k \rangle$, contredisant ainsi $y \notin H$. On en déduit alors (exercice) que $G = HK \simeq H \times K \simeq \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$. ■

Proposition 5.2. *Soit G un p-groupe et E un G-ensemble fini. Alors le nombre de point fixe de E sous l'action de G est congrus à $|E|$ modulo p.*

Démonstration. On sait que $|E|$ est somme du cardinal des orbites. Soit a le nombre d'orbites réduites à un éléments, c'est-à-dire, la somme des cardinaux des orbites réduites à un élément. Soit $x_1, \ldots, x_k$ des représentants des orbites non réduites à un élément. Comme le cardinal d'une orbite divise $|G|$, le nombre premier p divise $|\mathrm{Orb}(x_i)|$, pour tout $1 \leqslant i \leqslant k$. Donc :

$$|E| = a + \sum_{i=1}^{k} |\mathrm{Orb}(x_i)|$$

est congrus à a modulo p. ■

5.2 Théorèmes de Sylow

Plusieurs des notions et résultats précédents permettent de caractériser les sous-groupes d'un groupe fini donné. En particulier, on a vu que l'ordre d'un sous-groupe doit diviser l'ordre du groupe, ce qui réduit considérablement les possibilités. Cependant, cette contrainte n'est pas suffisante en général [2] pour caractériser l'ordre possible des sous-groupes. Par exemple, pour le groupe alterné A_4 d'ordre $12 = 2 \cdot 6$, on n'a pas de sous-groupe d'ordre 6 (voir l'exercice 3.9). Nous allons chercher à déterminer (en partie) quand un groupe donné admet un sous-groupe d'ordre d, pour d divisant son ordre. En toute généralité, cette question est peut-être trop difficile. Cependant, en la restreignant au cas où $d = p^n$, avec p premier, on a les résultats remarquables de Sylow. Afin de les énoncer, on se donne la définition suivante.

Définition. Soit G un groupe fini d'ordre $|G| = p^n m$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ et p premier ne divisant pas m. On dit qu'un sous-groupe de G est **un sous-groupe de Sylow** si son ordre est p^n. Autrement dit, c'est un p-sous-groupe d'ordre le plus grand possible.

On remarque que l'ordre de tout groupe fini G peut s'écrire $|G| = p^n m$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ et p premier ne divisant pas m.

2. Bien qu'elle le soit pour les groupes abéliens. Voir l'exercice 6.2.

Exemples. 1. Si $G = \mathbb{Z}_N$ avec $N = p^n m$, $n \in \mathbb{N}^*$ et p ne divise pas m, alors pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$ le sous-groupe engendré par la classe de $p^{n-k}m$ est d'ordre p^k. Il existe donc un p-sous-groupe de Sylow.

2. Si $G = S_3$ d'ordre $6 = 2 \cdot 3$, il existe exactement trois 2-sous-groupes de Sylow qui sont conjugués, ceux engendré par les transpositions, et exactement un 3-sous-groupe de Sylow, qui est engendré par le cycle (1 2 3) et est normal dans S_3.

Théorème 5.3 (Premier théorème de Sylow)**.** *Soit G un groupe fini d'ordre $|G| = p^n m$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ et p premier ne divisant pas m. Alors le groupe G possède un sous-groupe d'ordre p^s pour tout $0 \leqslant s \leqslant n$. En particulier, G contiens un p-sous-groupe de Sylow.*

Comme les sous-groupes d'ordre p premier sont cycliques, on en déduit le corollaire suivant, qui peut aussi être démontrer sans le théorème de Sylow (voir Exercice 3.22).

Corollaire 5.4 (Théorème de Cauchy)**.** *Soit G un groupe fini et p un nombre premier qui divise $|G|$, alors G possède un élément d'ordre p.*

Lemme 5.5 (Théorème de Cauchy pour les groupes abéliens)**.** *Soit G un groupe abélien fini et p un nombre premier qui divise $|G|$. Alors il existe un élément d'ordre p dans G.*

Démonstration. Pour $N \geqslant 2$ un entier et $N = p_1^{a_1} \dots p_l^{a_l}$ sa décomposition en nombres premiers on note $P(N) = a_1 + \cdots + a_n \geqslant 1$.

On démontre par récurrence sur $a \in \mathbb{N}^*$ la propriété suivante : si G est groupe fini abélien tel que $P(|G|) = a$, alors possède un élément d'ordre p premier pour tous les nombres premiers p qui divisent $|G|$.

Si $a = 1$ alors G est d'ordre un nombre premier p et est donc cyclique engendré par un élément d'ordre p.

Supposons maintenant $a > 1$. Soit p un nombre premier qui divise $|G|$ et soit $x \in G \backslash \{e\}$. On note $H = \langle x \rangle \lhd G$, car G abélien. Si p divise $h = |H|$ alors l'élément $x^{h/p}$ est un élément d'ordre p (exercice). Supposons que p ne divise pas H. Comme $H \lhd G$, on peut considérer le groupe quotient G/H. Comme $|G| = |G/H| \cdot |H|$ et $H \neq \{e\}$, on a $P(G/H) \leqslant a - 1$, et comme p ne divise pas $|H|$, p divise nécessairement $|G/H|$. Donc par récurrence, il existe un élément yH dans G/H d'ordre p. D'où $H = y^p H$ et donc $y^p \in H$. Comme H est fini, on a $(y^p)^k = e$ avec $k := \mathrm{ord}(y^p)$. Finalement, on a donc $\mathrm{ord}(y^k) = p$ ce qui conclu la preuve. ∎

Démonstration du théorème 5.3. On procède par récurrence sur l'ordre du groupe $|G| = p^n m$.

On sait que $|G| > 1$ car p divise le cardinal de G. Considérons l'action de G sur lui-même par conjugaison, et soit $G = \mathrm{Orb}(x_1) \sqcup \dots \sqcup \mathrm{Orb}(x_r)$ la partition de G en orbites, avec les orbites ordonnées

en ordre croissant de cardinalité. Considérons la relation déjà vue

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{x_i \notin Z(G)} [G : C(x_i)]$$

Soit $1 \leqslant s \leqslant n$, on distingue deux cas.

Dans le premier cas, p ne divise pas $|Z(G)|$. Alors p ne divise pas $[G : C(x_i)]$ pour un certain i. D'où p^s divise $|C(x_i)|$, puisque $|G| = [G : C(x_i)] \cdot |C(x_i)|$, et on a aussi $|C(x_i)| < |G|$, car $x_i \notin Z(G)$. Par récurrence, $C(x_i)$ possède un sous-groupe H d'ordre p^s, qui est en même temps un sous-groupe de G d'ordre p^s.

Dans le deuxième cas, p divise $|Z(G)|$. Alors $Z(G)$ possède un élément d'ordre p, disons c, en vertu du Lemme 5.5 car $Z(G)$ abélien. Soit H_0 le sous-groupe engendré par c. C'est un groupe cyclique d'ordre p, qui est un sous-groupe normal de G car $c \in Z(G)$. Alors G/H_0 est un groupe d'ordre $\frac{p^n m}{p} = p^{n-1}m$. Par récurrence, G/H_0 possède un sous-groupe d'ordre p^{s-1}, disons K. Soit $H = \pi^{-1}(K)$, où π est le morphisme naturel $G \to G/H_0$. C'est un sous-groupe de G tel que $H_0 \subseteq H$ et $H/H_0 \simeq K$. D'où $|H| = |H_0| \cdot |K| = p^s$. Ainsi H est un p-sous-groupe de G de l'ordre voulu, ce qui termine la preuve. ■

Théorème 5.6 (Deuxième théorème de Sylow)**.** *Soit G un groupe fini. Pour chaque diviseur premier p de $|G|$, les p-sous-groupes de Sylow sont conjugués.*

Démonstration. Fixons un p-sous-groupe de Sylow S, avec G d'ordre $p^n\, m$, et considérons un autre p-sous-groupe de Sylow S'. Par le théorème de Lagrange, $|G/S| = m$ et on rappelle que le groupe G agis transitivement, par translation, sur G/S. On a donc aussi une action par translation (pas nécessairement transitive) de S' sur G/S, obtenue par restriction de l'action de G aux éléments de S'. On obtient donc

$$|G/S| = \sum_i [S' : \mathrm{Stab}_{S'}(T_i)]$$

où $T_1, T_2, \ldots$ sont les translatés de S par les éléments de S'. On note que tous les $[S' : \mathrm{Stab}_{S'}(T_i)]$ divise p^n alors que p ne divise pas $|G/S|$. Il doit donc y avoir au moins un $[S' : \mathrm{Stab}_{S'}(T_i)]$ qui soit égal à 1, disons pour $T_i = gS$. On a donc $x \cdot gS = xgS = gS$, pour tout $x \in S'$. En particulier, $S' \subseteq gSg^{-1}$, et on doit avoir égalité puisque les deux ensembles ont le même nombre d'éléments. Ainsi S' et S sont conjugués, tel que voulu. ■

Le troisième théorème de Sylow donne une formule pour le nombre de p-sous-groupes de Sylow.

Théorème 5.7 (Troisième théorème de Sylow)**.** *Soit G un groupe fini, et p un diviseur premier de $|G|$. Soit N_p le nombre de p-sous-groupe de Sylow de G. Alors $N_p = [G : N(S)]$ divise $|G|$, où S est n'importe quel p-sous-groupe de Sylow, et $N_p \equiv 1 \pmod p$.*

Démonstration. Exercice 5.11 ■

Remarque. (a) Comme $N_p \equiv 1 \pmod{p}$, N_p ne divise pas p^n, donc N_p divise m.

(b) Si p est un facteur premier de $|G|$, alors G possède au moins un p-sous-groupe de Sylow, avec N_p divisant $|G|$ et $N_p \equiv 1 \bmod (p)$.

(c) Les p-sous-groupes de Sylow forment une orbite pour l'action de G sur $\mathcal{P}(G)$ par conjugaison et N_p est le cardinal de cette orbite qui est égale à $[G : N(S)]$.

(d) Un groupe fini G possède un seul p-sous-groupe de Sylow si et seulement si il possède un p-sous-groupe de Sylow qui soit un sous-groupe normal, c'est à dire si et seulement si $N_p = 1$.

(e) Si $N_{p,s}$ désigne le nombre de sous-groupes d'ordre p^s, alors on peut montrer que $N_{p,s} \equiv 1 \bmod (p)$.

Exemple. Supposons G un groupe d'ordre 30. On a $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$. Il y a au moins un 2-sous-groupe de Sylow, au moins un 3-sous-groupe de Sylow et au moins un 5-sous-groupe de Sylow. Les possibilités pour N_2 sont $1, 3, 5, 15$. Les possibilités pour N_3 sont $1, 10$. Les possibilités pour N_5 sont $1, 6$.

Exemple. Tout groupe d'ordre 20 possède au moins un sous-groupe normal propre. En effet, on a $20 = 2^2 \cdot 5$ et N_5 divise 20, $N_5 \equiv 1 \bmod (5)$. Les possibilités pour N_5 sont $1, 6, 11, 16$. On voit que nécessairement $N_5 = 1$. Il n'y a donc qu'un seul 5-sous-groupe de Sylow et il doit être normal.

Exemple. Tout groupe d'ordre 2^n possède au moins un sous-groupe normal propre. En effet, il possède au moins un sous-groupe d'ordre 2^{n-1} qui est alors d'indice 2 et donc normal.

Exemple. Tout groupe d'ordre 30 possède au moins un sous-groupe normal propre. En effet, il suffit de voir qu'au moins un parmi N_2, N_3, N_5 vaut 1. On a déjà vu que $N_2 = 1$ ou 3 ou 5 ou 15, $N_3 = 1$ ou 10, $N_5 = 1$ ou 6. Montrons que $N_3 = 1$ ou $N_5 = 1$. Sinon, on aurait $N_3 = 10$ et $N_5 = 6$. Disons $K_1, \ldots, K_{10}$ les 3-sous-groupes de Sylow, d'ordre 3, et $H_1, \ldots, H_6$ les 5-sous-groupes de Sylow, d'ordre 5. Puisqu'une intersection $H_i \cap H_j$ est un sous-groupe de H_i et H_j et que son ordre est un facteur de 5, on a $H_i \cap H_j = \{e\}$ si $i \neq j$. De façon semblable $K_i \cap K_j = \{e\}$ si $i \neq j$. Les H_i fourniraient donc au moins 24 éléments différents de e et les K_i au moins 20, ce qui donneraient au moins 44 éléments différents dans G, ce qui est absurde. Donc on doit avoir $N_3 = 1$ ou $N_5 = 1$, tel que voulu.

La proposition suivante peut s'avérer très utile afin de montrer qu'un groupe possède un sous-groupe normal, comme l'illustre l'exemple qui suit.

Proposition 5.8. *Soit G un groupe fini et H, K des sous-groupes de G. Alors on a la relation*

$$|HK| = \frac{|H| \cdot |K|}{|H \cap K|}$$

Démonstration. Voir Exercice 3.11. ■

Exemple. Tout groupe d'ordre 48 possède au moins un sous-groupe normal propre. En effet, on a $48 = 2^4 \cdot 3$. Considérons N_2. D'après les théorèmes de Sylow les possibilités sont $N_2 = 1$ ou $N_2 = 3$. Si

$N_2 = 1$, alors il y a un seul 2-sous-groupe de Sylow et il est normal, on a fini. Si $N_2 = 3$, soient H et K deux 2-sous-groupes de Sylow distincts, ici d'ordre 16. Considérons $|H \cap K|$. Les possibilités sont $|H \cap K| = 1, 2, 4, 8$. Si $|H \cap K| < 8$, alors d'après la proposition précédente $|HK| > 64$, ce qui ne peut être le cas. Donc on doit avoir $|H \cap K| = 8$. Alors $H \cap K$ est un sous-groupe d'indice 2 à la fois dans H et dans K, donc normal dans H et dans K. Mais alors H et K sont tous deux inclus dans le normalisateur de $H \cap K$ dans G, et on a sûrement $|N(H \cap K)| \geqslant |HK| = 32$. Puisque $|N(H \cap K)|$ doit aussi être un facteur de 48 on doit avoir $|N(H \cap K)| = 48$. Donc $N(H \cap K) = G$, autrement dit $H \cap K$ est normal dans G, et on a trouvé un sous-groupe normal de G.

5.3 Exercices

Exercice 5.1. Déterminer (en justifiant votre réponse) tous les sous-groupes de Sylow de S_4 et S_5.

Exercice 5.2. Montrez que tout groupe d'ordre 96 possède au moins un sous-groupe normal propre.

Exercice 5.3. Un groupe d'ordre 105 peut-il être simple ? (justifier votre réponse)

Exercice 5.4. Si un groupe d'ordre 104 ne contient pas de sous-groupe normal d'ordre 8, combien a-t-il de sous-groupes d'ordre 8 ?

Exercice 5.5. Soit G un groupe fini et $T \lhd G$. Soit p un nombre premier et supposons que p ne divise pas $[G : T]$. Montrez que T contient tous les p-sous-groupes de Sylow de G.

Exercice 5.6. Soit p un nombre premier.

(a) Montrer que dans un groupe d'ordre $4p$, un p-sous-groupe de Sylow est toujours normal si $p \geqslant 5$.

(b) Est-ce vrai pour $p = 3$? Justifier.

Exercice 5.7. Soit G un groupe non abélien d'ordre $182 = 2 \cdot 7 \cdot 13$.

(a) Montrer que G a un unique 7-sous-groupe de Sylow, on le note H.

(b) Montrer que et que le nombre de 13-sous-groupe de Sylow de G est égal à 1 ou 14.

(c) Soit K un 13-sous-groupe de Sylow. Montrer que $L = HK$ n'a qu'un seul 13-sous-groupe de Sylow. En déduire le nombre de 13-sous-groupes de Sylow de G.

(d) Montrer que $L \lhd G$.

(e) Soit $x \in G$ d'ordre 2. Prouver que G est isomorphe au produit semi-direct $L \rtimes \langle x \rangle$.

(f) Montrer qu'à isomorphisme près, il existe au moins 4 groupes d'ordre 182 et qu'ils sont classés par leur nombre d'éléments d'ordre 2.

(g) Donner le nombre exact de groupes d'ordre 182. Pour cela on regardera le nombre de produit semi-direct externe, c'est-à-dire, compter le nombre de morphisme de $\mathbb{Z}_2$ dans $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{91})$.

Exercice 5.8. Montrer que tous les groupes d'ordre plus petit que 60 possède au moins un sous-groupe normal propre, sauf les groupes dont l'ordre est un nombre premier.

Exercice 5.9.

(a) Montrer que tout groupe d'ordre 20 possède au moins un sous-groupe normal propre.

(b) Vérifier que l'opération de $\mathbb{R}^* \times \mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $r \cdot z = rz$ constitue une action du groupe multiplicatif $\mathbb{R}^*$ sur l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$. Pour chaque $z \in \mathbb{C}$ calculer $\mathrm{Stab}(z)$ et décrire géométriquement $\mathrm{Orb}(z)$ dans le plan complexe.

(c) Vérifier que le groupe des isométries de l'icosaèdre possède un sous-groupe d'ordre 2 qui est normal.

Exercice 5.10. Soit G un groupe d'ordre 8. Montrer que G est isomorphe à l'un des groupes suivants : le groupe des quaternions $Q_8 = \langle s, t \,|\, s^4 = e, s^2 = t^2, tst^{-1} = s^{-1} \rangle$; $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$; $\mathbb{Z}\ /4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; $\mathbb{Z}\ /2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ou $\mathcal{D}_4$

Exercice 5.11. Démontrer le troisième théorème de Sylow. (Indication : reprendre la preuve du deuxième théorème de Sylow et la raffner).

Exercice 5.12. Soit G un groupe fini et p un nombre premier. Soit $N \lhd G$ tel que p divise $|N|$.

(a) Soit P un p-sous-groupe de Sylow de N, montrer que $G = N_G(P)\, N$. On rappelle que le normalisateur $N_G(H)$ pour $H \leqslant G$ est le sous-groupe stabilisateur de H pour l'action de G par conjugaison sur l'ensemble des parties de G : $N_G(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$.

(b) Soit P un p-sous-groupe de Sylow de G et $H \leqslant G$ tel que $N_G(P) \subseteq H$, montrer que $N_G(H) = H$.

(c) On suppose que $|G/N| = p^n$ avec $n \geqslant 2$, montrer qu'il existe $H \lhd G$ tel que $|G/H| = p$.

Exercice 5.13. Soit G un groupe d'ordre 63. Montrer que G n'est pas simple.

Exercice 5.14. Soit G un groupe fini simple et p un nombre premier divisant l'ordre de G. On note N_p le nombrede $p-$sous-groupes de Sylow dans G. Montrer qu'il existe un morphisme de groupe injectif de G dans S_{N_p}. En déduire que $|G|$ divise $N_p!$

Exercice 5.15. Soit G un groupe d'ordre $2p$ avec p premier impair.

(a) On suppose G abélien, montrer que $G \simeq \mathbb{Z}/2p\mathbb{Z}$.

On suppose à partir de maintenant que G est non abélien.

(b) Montrer qu'il existe un unique sous-groupe H d'ordre p et que $H = \langle r \rangle$ est cyclique.

(c) Montrer qu'il existe $K \leqslant G$ d'ordre 2 tel que $G = H \rtimes K$ (produit semi-direct interne).

(d) On pose $K = \langle s \rangle$, montrer que $sr \notin H$. En déduire que $(sr)^2 = e$.

(e) Montrer que $G \simeq \langle a, b \mid a^2, b^p, abab \rangle$ est une présentation de G par générateurs et relations et que G est isomorphe au groupe diédral $\mathcal{D}_p$.

Exercices exploratoires

Exercice 5.16. Soit G un groupe fini, et soit p le plus petit diviseur premier de $|G|$. Supposons que G possède un sous-groupe H tel que $[G : H] = p$. Le but est de montrer que $H \lhd G$. Rappelons que G opère par translation à gauche sur l'ensemble $E := G/H = \{H, x_1H, \ldots, x_{p-1}H\}$, et qu'il s'ensuit qu'il existe un morphisme de groupes $\varphi : G \to S_E$.

(a) Montrer que $\ker(\varphi) \subseteq H$.

(b) Soit $K := \{f \in S_E : f(H) = H\}$. Montrer que K est un sous-groupe de S_E et que $|K| = (p-1)!$.

(c) Soit $L = \varphi(H)$, montrer que $|L|$ divise $(p-1)!$. En particulier, $|L|$ est relativement premier à p.

(d) Montrer que $|L|$ divise $|H|$.

(e) En déduire que $|L| = 1$, et que $H = \ker(\varphi)$. Conclure que $H \lhd G$.

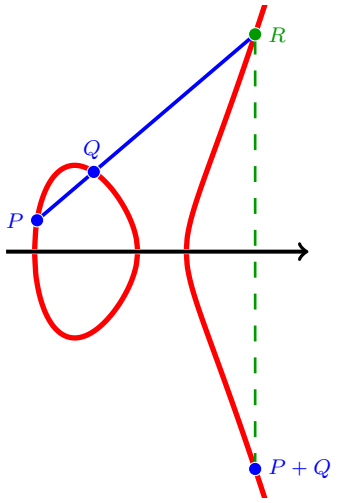
Exercice 5.17. Classifier, à isomorphisme près, les groupes de cardinal 12. (Dans le cas non abélien, on pourra distinguer les cas en fonction du nombre de 3-sous-groupes de Sylow, puis montrer que ce groupe est isomorphe à : $\mathcal{A}_4 \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ou $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.)

Exercice 5.18. Classifier, à isomorphisme près, tous les groupes finis d'ordre plus petit ou égal à 15.

Exercice 5.19. Montrer que tout groupe simple d'ordre 60 est isomorphe au groupe alterné $\mathcal{A}_5$.

Chapitre 6

Groupes abéliens finis



Un groupe cyclique est abélien, et un produit direct de groupes finis cycliques est donc abélien. En fait, les groupes abéliens finis s'obtiennent tous de cette façon comme l'affirme le théorème suivant.

Théorème 6.1 (Théorème de Kronecker)**.** *Tout groupe abélien fini est isomorphe à un produit direct de groupes cycliques.*

On représentera chaque groupe abélien fini comme un produit direct de certains de ses sous-groupes. Comme on se trouve dans le cadre des groupes abéliens, tous les sous-groupes considérés sont automatiquement normaux. On pourra être plus précis dans la représentation en produit direct par une certaine *unicité*.

Dans les groupes abéliens on utilise plus souvent la notation additive, et on parle alors de **somme directe** et on utilise la notation $G \oplus H$, et plus généralement $H_1 \oplus H_2 \oplus \ldots \oplus H_n$.

6.1 Groupes abéliens primaires

Pour un groupe abélien G, et p un nombre premier qui divise $|G|$, la **composante p-primaire** de G, notée $G(p)$, est définie comme

$$G(p) := \{x \in G \mid \text{il existe } n \in \mathbb{N},\ \text{ord}(x) = p^n\}.$$

Par convention on pose $G(p) = \{e\}$ si p ne divise pas $|G|$.

Proposition 6.2. *Soit p un nombre premier et G un groupe abélien, alors $G(p)$ est un sous-groupe de G.*

Démonstration. On a $e \in G(p)$ puisque $\text{ord}(e) = 1 = p^0$. D'autre part, si $x \in G(p)$, alors $x^{-1} \in G(p)$ car $\text{ord}(x^{-1}) = \text{ord}(x)$. Pour x et y dans $G(p)$, en vue de montrer que $xy \in G(p)$, on pose $n = n_1 + n_2$, où n_1 et n_2 sont tels que $\text{ord}(x) = p^{n_1}$ et $\text{ord}(y) = p^{n_2}$. On calcule alors que

$$(xy)^{(p^n)} = \underbrace{xy \cdot xy \cdot \ldots \cdot xy}_{p^n \text{ fois}} = \underbrace{xx \ldots x}_{p^n \text{ fois}} \cdot \underbrace{yy \ldots y}_{p^n \text{ fois}} = x^{(p^n)} y^{(p^n)},$$

car G est abélien. Il s'ensuit donc que

$$(xy)^{(p^n)} = x^{(p^n)} y^{(p^n)} = x^{(p^{n_1+n_2})} y^{(p^{n_1+n_2})} = (x^{(p^{n_1})})^{(p^{n_2})} (y^{(p^{n_2})})^{(p^{n_1})} = ee = e.$$

On conclut que p^n est un multiple de $\text{ord}(xy)$, de sorte que $\text{ord}(xy)$ est forcément une puissance de p. ■

Considérons par exemple $\mathbb{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. On a évidemment $\text{ord}(1) = 6$, $\text{ord}(2) = 3$, $\text{ord}(3) = 2$, $\text{ord}(4) = 3$, $\text{ord}(5) = 6$, et $|G| = 2 \cdot 3$. On constate que $G(2) = \{0, 3\}$, $G(3) = \{0, 2\}$. D'autre part, pour $\mathbb{Z}_{24} = \{0, 1, 2, \ldots, 24\}$. On a $|G| = 2^3 \cdot 3$. On obtient $G(2) = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21\}$, $G(3) = \{0, 8, 16\}$. Par définition même, $G(p)$ est constitué de tous les éléments de G dont l'ordre est une puissance de p.

Proposition 6.3. *Soit p un nombre premier et G un groupe abélien fini dont tous les éléments sont d'ordre une puissance de p. Alors le cardinal de G est une puissance de p.*

Démonstration. Voir Exercice 4.13 ■

Notons que, réciproquement, si $|G| = p^n$ alors tous les éléments de G sont d'ordre une puissance de p. On dit d'un groupe que c'est un **p-groupe** si son cardinal est une puissance de p, un nombre premier. On dit aussi des p-groupes, que ce sont des **groupes primaires**, si on ne désire pas mettre en évidence le rôle du nombre premier p. Ainsi, les groupes $\mathbb{Z}_9$, $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_3^n$, et $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{27}$ sont des 3-groupes.

Corollaire 6.4. *La composante primaire $G(p)$ est l'unique p sous-groupes de Sylow de G.*

Démonstration. Comme G est abélien, tous les sous-groupes sont normaux et donc il existe un unique p-sous-groupe de Sylow. Comme les éléments de l'unique p-sous-groupes de Sylow sont d'ordre une puissance de p, on a forcément qu'il est contenu dans $G(p)$. Or $G(p)$ est un p-sous-groupe de G dont l'ordre maximal possible est celui du p-sous-groupe de Sylow, ce qui entraîne l'égalité. ■

6.2 Décomposition primaire

Nous allons montrer que tout groupe abélien fini est produit direct interne de ses composantes primaires.

Théorème 6.5. *Soit G un groupe abélien fini et $|G| = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ où les p_i sont premiers. Alors G est produit direct interne de ses composantes primaires $G(p_i)$, en particulier $G \simeq G(p_1) \times \dots \times G(p_k)$.*

Par exemple, comme on là déjà vu pour $G = \mathbb{Z}_{30}$, sous une autre forme, on a que

$$G = G(2)\, G(3)\, G(5),$$

c.-à-d. G est produit direct interne des sous-groupes $G(2)$, $G(3)$, et $G(5)$. En préparation de la preuve du théorème, on a besoin de certains résultats préliminaires.

Lemme 6.6. *Soit G un groupe abélien fini, dans lequel on a des éléments $y_1, \dots, y_n \in G$, respectivement tels que $\mathrm{ord}(y_i) = m_i$, avec les m_i relativement premiers deux à deux. Alors $\mathrm{ord}(y_1 \dots y_n) = m_1 \dots m_n$.*

Démonstration. Nous n'allons faire que le cas $n = 2$; le cas général peut se faire par récurrence. Donc disons y_1, y_2 avec $\mathrm{ord}(y_1) = m_1$ et $\mathrm{ord}(y_2) = m_2$. À voir : $\mathrm{ord}(y_1 y_2) = m_1 m_2$. Il suffit de voir que si $(y_1 y_2)^m = e$ alors m est un multiple de $m_1 m_2$. Notons que $\langle y_1 \rangle \cap \langle y_2 \rangle = \{e\}$; en effet posons $H = \langle y_1 \rangle \cap \langle y_2 \rangle$, alors H est un sous-groupe de $\langle y_1 \rangle$ et $\langle y_2 \rangle$, donc $|H|$ divise m_1 et m_2, d'où $|H| = 1$ car m_1 et m_2 sont premiers entre eux. Supposons $(y_1 y_2)^m = e$. On a $(y_1 y_2)^m = y_1^m y_2^m$ car G est abélien. On obtient $y_1^m = y_2^{-m} \in H$, donc $y_1^m = e$ et $y_2^{-m} = e = y_2^m$. Il s'ensuit que m est un multiple de m_1 et m_2, donc un multiple de $m_1 m_2$, car m_2 et m_2 sont premiers entre eux. ∎

Lemme 6.7. *Soient G un groupe abélien et $H_1, \dots, H_n$ des sous-groupes de G. Alors*

$$\langle H_1 \cup \dots \cup H_n \rangle = H_1 H_2 \dots H_n$$

est un sous-groupe de G

Démonstration. Voir exercice 2.27. On a

$$H_1 H_2 \dots H_n = \{g \in G \mid \exists h_i \in H_i, g = h_1 h_2 \dots h_n\}$$

Il est immédiat que chaque élément $h_1 h_2 \dots h_n$, $h_i \in H_i$, appartient à tout sous-groupe de G qui contient $H_1 \cup \dots \cup H_n$. Il suffit donc de voir que $H_1 H_2 \dots H_n$ forme un sous-groupe de G qui contient $H_1 \cup \dots \cup H_n$. Or si $h_i \in H_i$, alors $h_i = e \dots e h_i e \dots e \in H_1 H_2 \dots H_n$. Donc on a bien $H_1 \cup \dots \cup H_n \subseteq H_1 H_2 \dots H_n$. Puisque $e \in H_i$, on a $e = e \dots e \in H_1 H_2 \dots H_n$. Par ailleurs, si $x \in H_1 H_2 \dots H_n$, disons $x = h_1 \dots h_n$, $h_i \in H_i$, alors $x^{-1} = h_n^{-1} \dots h_1^{-1} = h_1^{-1} \dots h_n^{-1}$, car G est abélien, et comme $h_i^{-1} \in H_i$ on a bien $x^{-1} \in H_1 H_2 \dots H_n$. Finalement, si $x, y \in H_1 H_2 \dots H_n$, disons $x = a_1 \dots a_n$, $a_i \in H_i$, $y = b_1 \dots b_n$, $b_i \in H_i$, alors $xy = a_1 \dots a_n b_1 \dots b_n = a_1 b_1 \dots a_i b_i \dots a_n b_n$, car G est abélien, et $a_i b_i \in H_i$, de sorte que $xy \in H_1 H_2 \dots H_n$. ∎

Démonstration du théorème 6.5. On sait que les $G(p_i)$ sont des sous-groupes normaux car G abélien. Par le lemme précédent, on a

$$\left\langle \bigcup_{1\leqslant i\neq j\leqslant k} G(p_j) \right\rangle = \prod_{i\neq j}^{n} G(p_j).$$

Afin de mon montrer que G est le produit direct interne de ses sous-groupes primaires, il faut montrer les deux énoncés suivants(voir l'exercice 2.27 qui concerne le produit direct interne de plusieurs sous-groupes).

(1) Il faut voir que $G(p_i) \cap \prod_{i\neq j}^{n} G(p_j) = \{e\}$, puis que $G = G(p_1)\dots G(p_k)$. À cette fin, soit $x \in G(p_i) \cap \prod_{i\neq j}^{n} G(p_j)$. D'une part, comme $x \in G(p_i)$, on a que $\mathrm{ord}(x) = p_i^{t_i}$ pour un certain $t_i \leqslant \alpha_i$. D'autre part, on peut écrire x comme un produit

$$x = x_1 \dots \widehat{x_i} \dots x_k$$

avec les $x_j \in G(p_j)$, et donc ayant $\mathrm{ord}(x_j) = p^{t_j}$, pour certains $t_j \leqslant \alpha_j$. En vertue du lemme 6.6 ci-dessus on a

$$\mathrm{ord}(x_1 \dots \widehat{x_i} \dots x_k) = p_1^{t_1} \dots \widehat{p_i^{t_i}} \dots p_k^{t_k}.$$

Puisque les p_i sont premiers deux à deux, la seule façon de réconcilier ces énoncés est que $t_i = 0$ et $t_j = 0$, pour tout j. On conclut donc que $x = e$.

(2) Maintenant, pour $x \in G$, on cherche à construire des $x_i \in G(p_i)$ tels on a $x = x_1 x_2 \cdots x_k$. Pour ce faire, rappelons que $\mathrm{ord}(x)$ divise $p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$, et donc

$$\mathrm{ord}(x) = n = p_1^{t_1} \dots p_k^{t_k}, \qquad \text{pour} \qquad 0 \leqslant t_i \leqslant \alpha_i.$$

Ainsi, si on pose $n_i := n/p_i^{t_i}$, on a que $\mathrm{pgcd}(n_1, \dots, n_k) = 1$. Il existe donc des entiers λ_i tels que

$$\lambda_1 n_1 + \dots + \lambda_k n_k = 1$$

Il s'ensuit que

$$x = x^{\lambda_1 n_1} x^{\lambda_2 n_2} \dots x^{\lambda_k n_k}.$$

Mais alors, par définition de n_i,

$$(x^{\lambda_i n_i})^{(p_i^{t_i})} = x^{\lambda_i n} = e$$

on trouve donc l'expression désirée en posant $x_i := x^{\lambda_i n_i}$, qui est bien dans $G(p_i)$ par l'égalité ci-dessus. Ceci achève la démonstration. ∎

Corollaire 6.8. *Soit G comme ci-dessus, $|G| = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$. Alors $|G(p_i)| = p_i^{\alpha_i}$.*

Le théorème précédent ramène l'étude de la structure des groupes abéliens finis, à celle des groupes abéliens finis primaires. Le théorème suivant décrit entièrement la structure de ceux-ci.

Théorème 6.9. *Tout p-groupe abélien fini est produit direct interne de groupes cycliques.*

La preuve est une conséquence des deux lemmes suivants.

Lemme 6.10. *Soit G un p-groupe abélien fini qui contient un unique sous-groupe d'ordre p, alors G est cyclique.*

Démonstration. ∎

Lemme 6.11. *Soit G un p-groupe abélien fini et H un sous-groupe cyclique d'ordre maximal. Alors il existe $K \leqslant H$ tel que $G = HK$ est un produit direct interne.*

Démonstration. ∎

Démonstration du Théorème 6.9. ∎

6.3 Théorème principal

Théorème 6.12. *Tout groupe abélien fini est isomorphe à un produit direct de groupes cycliques. Plus précisément, il est produit direct interne de sous-groupes cycliques.*

Démonstration. Découle des deux théorèmes précédents. ∎

Notons qu'on n'a pas une unicité directe : par exemple le groupe cyclique $\mathbb{Z}_6$ est aussi isomorphe au produit direct $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$. Par contre, on peut noter que la décomposition d'un groupe abélien en produit direct interne de ses composantes primaires est unique puisque les composantes primaires sont complètement déterminées. D'autre part on a le résultat suivant.

Proposition 6.13. *La décomposition d'un p-groupe abélien fini en produit direct de groupes cycliques est unique au sens suivant. Soit G un p-groupe abélien fini et G_i, H_i des p-groupes cycliques tels que*

$$G \simeq G_1 \times \ldots \times G_r$$

et

$$G \simeq H_1 \times \ldots \times H_s$$

Alors $r = s$ et, à un réarrangement près, $|G_i| = |H_i|$ (donc $G_i \simeq H_i$).

Démonstration. ■

Ce résultat et la remarque précédente sur les composantes primaires permettent d'introduire une certaine unicité dans le théorème principal.

Théorème 6.14. *Tout groupe abélien fini possède une décomposition en produit direct interne de sous-groupes cycliques primaires, et cette décomposition est unique au sens où deux telles décompositions comportent le même nombre de facteurs de chaque ordre.*

Pour $G = \mathbb{Z}_n$, et $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$. On note que chaque composante primaire $\mathbb{Z}_n(p_i)$ est cyclique. Ainsi, la décomposition primaire donne la décomposition dont il est question dans le théorème précédent :

$$\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}_n(p_1) \times \ldots \times \mathbb{Z}_n(p_r)$$

Une conséquence de l'unicité dans le théorème précédent est que tout p-groupe abélien fini qui est cyclique est **indécomposable**, c'est-à-dire qu'il ne peut pas être représenté comme produit direct de groupes plus petits. Une autre conséquence est qu'on peut produire la liste exacte (à isomorphisme près) de tous les groupes abéliens finis d'un cardinal donné. Par exemple, les seuls groupes abéliens finis d'ordre 8 sont (à isomorphisme près) l'un des trois suivants

$$\mathbb{Z}_8, \qquad \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4, \qquad \text{et} \qquad \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

De façon similaire, pour $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$, on trouve de décomposition ne pouvant contenir que des 2-groupes de cardinal 2 ou 4, des 3-groupes de cardinal 3 ou 9, et des 5-groupes de cardinal 5. Les possibilités sont donc

$$\begin{aligned}
&\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_5, \\
&\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5, \\
&\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_5, \\
&\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5.
\end{aligned}$$

On ne trouve donc que 4 tels groupes. En y réfléchissant correctement, on peut trouver une formule qui donne (toujours à isomorphisme près) le nombre de groupes abéliens finis d'un cardinal donné n.

6.4 Exercices

Exercice 6.1. Désignons par $\text{ord}(z)$ l'ordre de l'élément z dans un groupe donné. Donnez un contre-exemple pour vérifier que la relation $\text{ord}(xy) = \text{ppcm}(\text{ord}(x), \text{ord}(y))$ n'est pas valide en général.

Exercice 6.2. Montrer que dans un groupe abélien fini A, il existe pour tout diviseur d de $|A|$, un sous-groupe d'ordre d. (N.B. C'est en quelque sorte une réciproque du théorème de Lagrange pour les groupes abéliens.)

Exercice 6.3. Montrer que si $n_1, \ldots, n_k$ sont des entiers premiers entre eux, alors

$$\mathbb{Z}_{n_1 \ldots n_k} \simeq \mathbb{Z}_{n_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_k.$$

Exercice 6.4. Soit $n > 1$ un entier qui n'est pas divisible par le carré d'un autre entier plus grand que 1. Montrez alors que tout groupe abélien fini d'ordre n est cyclique.

Exercice 6.5. Énumérer tous les groupes abéliens d'ordre 72, à isomorphisme près.

Exercice 6.6. Les groupes $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{72}$ et $\mathbb{Z}_{18} \times \mathbb{Z}_{48}$ sont-ils isomorphes ?

Exercice 6.7. Soit G un groupe abélien, $H_1, \ldots, H_n$ des sous-groupes, et $H = H_1 H_2 \cdots H_n$.

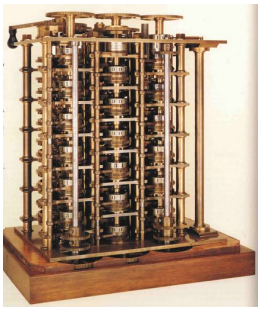
(a) Montrer que $H \leqslant G$.

(b) Montrer que H est le plus petit sous-groupe de G qui contienne $H_1 \cup \cdots \cup H_n$.

Exercice 6.8. Faire la liste de tous les groupes abéliens finis d'ordre 252, à isomorphisme près. Justifier.

Annexe A

Théorie des groupes avec le calcul formel



Pour se familiariser avec des notions mathématiques, le calcul formel est des plus efficace. L'idée est de rester le plus près possible de la présentation mathématique, et d'utiliser l'ordinateur comme un outil de manipulation d'objets mathématiques abstraits. Bien que nous n'allons montrer dans ce chapitre comment le faire qu'avec le système de calcul Maple, plusieurs autres outils sont accessibles. Le système « open source » Sage est un bon exemple, et on accède au tutoriel qui montre la façon d'utiliser Sage pour la théorie des groupes à l'endroit suivant doc.sagemath.org.

Comme la grande majorité des systèmes de calcul formel, Maple est un système interactif fonctionnant sous le mode « question/instruction–réponse/résultat ». Une introduction générale à Maple est disponible dans le texte Calcul formel (avec Maple) (F. Bergeron 2014). En mode d'intercation classique (worksheet mode), un symbol « > » indique que le système est prêt à recevoir une instruction. Pour avoir accès aux outils de manipulation de groupes, on donne l'instruction suivante (qui se termine par « : » pour signifier qu'on ne s'attend pas à une réponse).

```
> with(GroupTheory) :
```

On peut obtenir de l'aide sur les outils alors rendu disponible avec l'instruction :

```
> ?GroupTheory
```

On peut construire des groupes classiques (groupe alterné, groupe diédral, groupe général linéaire, groupe de permutations, etc.), en trouver des propriétés (ordre, transitivité, primitivitée, calculer le treillis des sous-groupes). On peut construire de nouveaux groupes à partir de groupes donnés (produit direct), trouver tous les groupes d'un certain ordre, etc. Par exemple, on peut définir le groupe alterné, trouver son ordre, et vérifier s'il est transitif de la façon suivante :

```
> G :=AlternatingGroup(7)) :
```

G=**A**[7]

> GroupOrder(G) ;

2520

> IsTransitiveG ;

true

Pour obtenir la suite dont les termes donnent le nombre de groupes de « petite » cardinalité, on fait comme suit :

> [seq(nops(AllSmallGroups(k)),k=1..32)] ;

[1, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 5, 2, 2, 1, 5, 1, 2, 1, 14, 1, 5, 1, 5, 2, 2, 1, 15, 2, 2, 5, 4, 1, 4, 1, 51]

Ces groupes peuvent être décrits de plusieurs façon, par défaut ils sont présentés comme sous-groupes d'un certain S_n, avec leur générateurs écrits en notation cyclique. Ainsi, on obtient

> AllSmallGroups(8) :map(print,%) :

$$\langle\ (1,2,4,6,8,7,5,3)\ \rangle$$
$$\langle\ (1,2,5,3)(4,6,8,7),\ (1,4)(2,6)(3,7)(5,8)\ \rangle$$
$$\langle\ (1,2)(3,7)(4,6)(5,8),\ (1,3)(2,5)(4,8)(6,7),\ (1,4)(2,6)(3,8)(5,7)\ \rangle$$
$$\langle\ (1,2,6,3)(4,8,5,7),\ (1,4,6,5)(2,7,3,8),\ (1,6)(2,3)(4,5)(7,8)\ \rangle$$
$$\langle\ (1,2)(3,5)(4,6)(7,8),\ (1,3)(2,5)(4,7)(6,8),\ (1,4)(2,6)(3,7)(5,8)\ \rangle$$

Pour les groupes de permutations, comme le groupe du cube de Rubic :

> RubiksCubeGroup() ;

$$\begin{aligned} G\ :=\ \langle\ & (6,25,43,16)(7,28,42,13)(8,30,41,11)(17,19,24,22)(18,21,23,20),\\ & (1,14,48,27)(2,12,47,29)(3,9,46,32)(33,35,40,38)(34,37,39,36),\\ & (1,17,41,40)(4,20,44,37)(6,22,46,35)(9,11,16,14)(10,13,15,12),\\ & (3,38,43,19)(5,36,45,21)(8,33,48,24)(25,27,32,30)(26,29,31,28),\\ & (1,3,8,6)(2,5,7,4)(9,33,25,17)(10,34,26,18)(11,35,27,19),\\ & (14,22,30,38)(15,23,31,39)(16,24,32,40)(41,43,48,46)(42,45,47,44)\ \rangle \end{aligned}$$

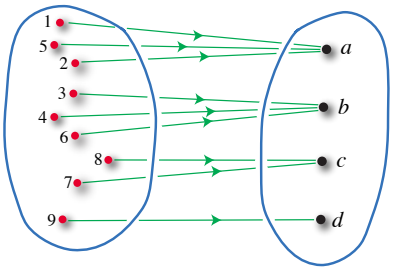
on peut calculer le stabilisateur et l'orbites d'éléments. Le groupe général linéaire, sur un corps fini à q éléments, correspond à $GL(n,q)$. Son ordre dépend de q de manière polynomiale, et on obtient son ordre comme suit :

> GroupOrder(GL(3, q)) ;

$$\left(q^6-1\right)\left(q^6-q\right)\left(q^6-q^2\right)\left(q^6-q^3\right)\left(q^6-q^4\right)\left(q^6-q^5\right)$$

Annexe B

Rappels sur les ensembles et fonctions



B.1 Le langage ensembliste

La théorie des ensembles a été introduite par Georg Cantor. On peut en donner une axiomatique rigoureuse qui n'est pas discutée ici. Un **ensemble** est une collection d'objets. La théorie suppose que les ensembles contiennent des **éléments**, et on écrit $a \in A$ pour dire que « a est un élément de A » ou que « a appartient à A ». Si a n'est pas un élément de A, on écrit $a \notin A$ et on lit « a n'appartient pas à A » ou « a n'est pas dans A ». L'appartenance (ou pas) à un ensemble doit être claire. Autrement dit, cette appartenance ne doit pas être question de point de vue, on d'interprétation. Comme pour tout concept mathématique, il est important de bien comprendre quand deux ensembles sont égaux. La règle est toute simple (mais on l'oublie parfois) :

« Deux ensembles sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes éléments. »

Autrement dit, pour « connaître » un ensemble il faut savoir dire quels en sont les éléments.

Deux façons typiques de décrire un ensemble consistent à : soit, donner la liste de tous ses éléments (quand il n'en contient pas trop), soit via la description d'une propriété qui caractérise ses éléments. L'écriture $E = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ signifie donc que E est composé des éléments $x_1, x_2, \ldots, x_m$; il peut y avoir des répétitions d'éléments : par exemple, $\{a, b, a\}$ représente le même ensemble que $\{a, b\}$. On a donc les présentations équivalentes

$$\{a, b, c\} = \{c, a, b\} = \{a, b, a, b, c, a, b, a\},$$

d'un même ensemble qui contient les trois éléments : a, b et c. L'ordre dans lequel on écrit les éléments n'importe pas : par exemple, $\{b, a\}$ représente le même ensemble que $\{a, b\}$. Fréquemment, on se donne

une propriété P pour définir un ensemble. On écrit $A = \{x \in E \,|\, x \text{ possède } P\}$ pour dire que A est l'ensemble des éléments de E qui possèdent la propriété P. Pour montrer qu'un élément x de E est en fait dans A, il suffira donc de montrer que x a la propriété P.

Typiquement, on commence par considérer des ensembles de base comme

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &:= \{a, b, c, d, \ \ldots\ , z\},\\
\mathbb{N} &:= \{0, 1, 2, 3, \ \ldots\ \},\\
\mathbb{Z} &:= \{\ldots\ , -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ \ldots\ \},\\
\mathbb{Q} &:= \{a/b \mid a \in \mathbb{Z}, \quad b \in \mathbb{N}, \text{ et } b \neq 0\ \},\\
\mathbb{C} &:= \{x + i\,y \mid x, y \in \mathbb{R}\},
\end{aligned}$$

où $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble ds **nombres réels**, ou encore des ensembles d'objets divers comme

$$\{\bullet, \bullet, \bullet\}, \qquad \text{ou} \qquad \{\clubsuit,\ \diamondsuit,\ \heartsuit,\ \spadesuit\}.$$

L'ensemble qui ne contient aucun élément est, par définition, l'ensemble **vide**, et on le représente par le symbole $\varnothing$. Un **singleton** est un ensemble à un élément. Si $a \neq b$, alors on dit de l'ensemble $\{a, b\}$ que c'est une **paire**. Rappelons que $\{a, b\} = \{b, a\}$, et que $\{a, a\} = \{a\}$ n'est pas une paire.

Remarque. Il a été historiquement bien établi que l'imprécision de la définition d'un ensemble peut engendrer des paradoxes (voir par exemple le paradoxe de Bertrand Russell (1872-1970) dans tout bon livre de logique). Pour éviter cela, nous ne travaillerons qu'avec un petit nombre d'ensembles bien étudiés et stables. Tous les ensembles considérés s'obtiennent à partir de l'ensemble vide et d'axiomes de construction d'ensembles.

Un ensemble E est **fini** si on peut écrire $E = \{x_1, \ldots, x_n\}$, avec $n \in \mathbb{N}$ fixé. Si les éléments x_i sont tous distincts, alors on dit que l'entier n est le **cardinal** de E et on le note : $n = |E|$. Par convention $|\varnothing| = 0$. Un ensemble E est **infini** s'il n'est pas fini. Par exemple, $\{1, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 34\}$ est fini, mais $\mathbb{N}$ ne l'est pas. On dit que A est un **sous-ensemble** de E, si tous les éléments de A appartiennent à E. On dit aussi que A est **contenu** dans E et on écrit $A \subseteq E$. C'est la relation **d'inclusion**. Les ensembles $\varnothing$ et E sont des sous-ensembles particuliers de E. Tout autre sous-ensemble de E est un **sous-ensemble propre**. Si A n'est pas un sous-ensemble de E, on écrit $A \nsubseteq E$. Par exemple, on a $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$. Ce qui signifie que $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$, etc., mais aussi que $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$. On dit que l'inclusion est **transitive**. Il est clair que tout sous-ensemble d'un ensemble fini est fini.

On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des sous-ensembles de l'ensemble E :

$$\mathcal{P}(E) = \{A \,|\, A \subseteq E\}.$$

Par exemple, pour $E = \{1, 2, 3\}$, on a $\mathcal{P}(E) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, E\}$. Si $|E| = n$, alors $|\mathcal{P}(E)| = 2^n$. Pour montrer qu'un ensemble A est inclus dans un ensemble E, on doit montrer qu'un élément quelconque de A est forcément aussi un élément de E. Autrement dit que : $x \in A \Rightarrow x \in E$.

Montrer que $A = E$ équivaut à montrer que $A \subseteq E$ et $E \subseteq A$. La **différence** de deux ensembles A et B, notée $A\backslash B$, est l'ensemble défini par

$$A\backslash B = \{x \in A \,|\, x \notin B\}.$$

Si le contexte fait en sorte que l'ensemble E est clair, et si $A \subseteq E$, alors on écrit parfois $A^c := E\backslash A$. On dit que A^c est le **complément** de A (dans E). Dans le cas d'un ensemble de nombres E, qui contient 0, on écrit souvent E^* pour l'ensemble $E\backslash\{0\}$.

Deux **couples** (a, b) et (a', b') sont égaux, si et seulement si $a = a'$ et $b = b'$. On admet le cas $a = b$, pour obtenir le couple (a, a). Soulignons que l'ordre gauche droite est important, c.-à-d. $(a, b) \neq (b, a)$ sauf si $a = b$. Pour deux ensembles A et B, le **produit cartésien** de A et B est l'ensemble

$$A \times B = \{(a, b) \,|\, a \in A, b \in B\}.$$

On observe que $\varnothing \times E = E \times \varnothing = \varnothing$. En effet, il n'existe pas de couple (a, b) tel que $a \in E$ et $b \in \varnothing$. En général $A \times B \neq B \times A$. Le cardinal de $A \times B$ est le produit du cardinal de A et du cardinal de B. Par exemple, le plan cartésien est $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, et E est un ensemble, le produit cartésien n fois de E est l'ensemble défini par récurrence

$$E^n = E \times E^{n-1},$$

avec $E^0 := \{E\}$ (c'est un singleton, un ensemble à un seul élément), dont les éléments sont appelés **n-uplets**. On écrit d'habitude

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad \text{où} \qquad x_i \in E,$$

pour un élément de E^n, et alors l'unique élément de E^0 s'écrit $x = (\,)$. Il est facile de voir qu'il y a une bijection (naturelle) entre $E^n \times E^k$ et E^{n+k} ; mais, à strictement parler, ces deux ensembles ne sont pas « égaux ». En effet, les éléments du premier ensemble sont de la forme

$$((x_1, \ldots, k_k), (y_1, \ldots, y_n)),$$

tandis que ceux du deuxième sont de la forme (très similaire, mais différente)

$$(x_1, \ldots, k_k, y_1, \ldots, y_n).$$

Il est souvent « correct » de les identifier, mais il faut parfois faire attention. On peut donner un sens mathématique précis à au terme « naturel », mais intuitivement cela signifie que la notion s'impose. Pour tout ensemble E et tout singleton $\{\star\}$, on a aussi une bijection naturelle

$$\eta : E \longrightarrow E \times \{\star\}, \qquad \text{avec} \qquad \eta(x) := (x, \star).$$

L'union, de deux ensembles A et B, est l'ensemble formé de tous les éléments qui appartiennent à A **ou** à B (ou aux deux). On le note $A \cup B$, et donc

$$A \cup B := \{x \,|\, x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

L'intersection de deux ensembles A et B l'ensemble des éléments communs à A **et** B. On le note $A \cap B$ et donc

$$A \cap B = \{x \,|\, x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

Pour tout A et B, on a l'inclusion $A \subseteq A \cup B$. De plus, $A \cap B$ est un sous-ensemble de A et de B. D'autre part, $A \cap B = A$ si et seulement si $A \subseteq B$. Si $A \cap B = \varnothing$, on dit que A et B sont **disjoints**. Si A et B sont disjoints, on écrit souvent $A + B$ pour l'union de A et de B. On dit que c'est **l'union disjointe** [1]. Les principales propriétés de ces opérations sur les suivantes sont les suivantes. Pour A, B, C des ensembles, alors

1. $A \cap A = A$ et $A \cup A = A$ (idempotence) ;
2. $A \cup B = B \cup A$ et $A \cap B = B \cap A$ (commutativité) ;
3. $A \cup \varnothing = A$ et $A \cap \varnothing = \varnothing$; et si $A \subseteq B$ alors $A \cup B = B$ et $A \cap B = A$ (existence d'éléments neutres) ;
4. $(A^c)^c = A$; $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ et $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ (Lois de Morgan).

La réunion de plusieurs ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_n$, où $n \in \mathbb{N}^*$ est notée

$$\bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n.$$

Si l'on a une famille infinie d'ensembles $(A_i)_{i \in I}$, on écrit $\bigcup_{i \in I} A_i$ pour leur réunion ; ici, I est un *ensemble d'indices*.

Exemple. Si $A_n = \{0, 1, \ldots, n\}$, on aura $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \mathbb{N}$.

Pour l'intersection, on a des notations analogues.

Exemple. Avec A_n comme dans l'exemple précédent, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{0\}$.

Pour résumer, on a :

$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \iff \exists i \in I, x \in A_i$$

et

$$x \in \bigcap_{i \in I} A_i \iff \forall i \in I, x \in A_i.$$

1. On préfère ici la notation $A + B$ pour l'union disjointe de A et de B, plutôt que les notations $A \cup B$ ou $A \uplus B$.

Partitions d'ensemble Une partition d'un ensemble E est une famille $\{A_i\}_{i\in I}$ de sous-ensembles non vides de E tel que :

(i) $E = \bigcup_{i\in I} A_i$;

(ii) Les A_i sont disjoints deux à deux, i.e., pour tout $i, j \in I$ distincts, $A_i \cap A_j = \varnothing$ sont disjoints.

Par exemple, l'ensemble des nombres pairs et l'ensemble des nombres impairs forment une *partition* de $\mathbb{Z}$.

Exemples. (a) $2\mathbb{Z}, \mathcal{I}$ forment une partition de $\mathbb{Z}$. (b) $2\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z}$ ne forment pas une partition de $\mathbb{Z}$ car $6 \in 2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z}$. (c) Soit $A_x = [x, x+1[$ où $x \in \mathbb{Z}$; alors $(A_x)_{x\in\mathbb{Z}}$ est une partition de $\mathbb{R}$.

B.2 Les fonctions

Bien que ce soit l'une des notions les plus importantes des mathématiques, la définition rigoureuse moderne de la notion de fonction n'apparaît qu'au XIX^{e}(en 1837). Elle est due à Johann Dirichlet (1805-1859). Dans le langage de la théorie des ensembles, elle prend la forme suivante. Soit A et B deux ensembles. Une **fonction** f, de A vers B (on écrit $f : A \to B$), est une règle qui associe à chaque élément de a un unique élément de B. Plus techniquement, f est un sous-ensemble de $A \times B$, et on écrit $f(a) = b$ si et seulement si le couple (a, b) appartient à ce sous-ensemble. Pour que f soit une fonction, il suffit que

1. pour tout $a \in A$, il existe un b tel que $f(a) = b$, et
2. si $f(a) = b$ et $f(a) = c$, alors $b = c$.

Une fonction f de A vers B, est une **bijection**, si on a une fonction **inverse** $f^{-1} : B \to A$, pour la composition, c.-à-d. :

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_A, \text{ et } f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_B. \tag{B.1}$$

Une fonction $f : A \to B$ est **injective** si et seulement si, pour tout a et tout b dans A

$$a \neq b \qquad \Longrightarrow \qquad fa) \neq f(b), \tag{B.2}$$

ce qui équivaut (c'est la contraposée) à dire aussi que

$$f(a) = f(b) \quad \text{entraine forcément} \quad a = b. \tag{B.3}$$

Une fonction $f : A \Rightarrow B$ est dite **surjective** si et seulement si pour chaque élément y de B, il existe au moins un élément x de A tel que $f(x) = y$. On montre qu'une fonction qui est à la fois surjective et injective est une fonction bijective, et inversement. Par définition [2], deux ensembles ont le même cardinal si et seulement si il existe une bijection entre les deux ensembles.

Pour A et B donnés, on désigne par B^A ou $\mathrm{Fonct}(A, B)$ **l'ensemble des fonctions** de A dans B.

2. La définition est nécessaire pour des ensembles infinis.

B.3 Relations d'équivalences

Nous allons nous intéresser ici aux relations qui servent à regrouper les éléments d'un ensemble par « familles ». On pourrait par exemple définir une relation qui regroupe les cartes d'un jeu de cartes par couleurs : c'est une relation d'équivalence.

Soit E un ensemble et R une relation sur E. On dit que R est une *relation d'équivalence* si $\sim$ est :

Réflexive : $\forall x \in E$, on a xRx.

Symétrique : $\forall x, y \in E$, $xRy \Longrightarrow yRx$.

Transitive : $\forall x, y, z \in E$, xRy et yRz implique xRz.

Exemple. (a) Si $E = \{\text{habitants du Québec}\}$, on peut définir la relation suivante : deux habitants du Québec x et y sont en relation xRy si et seulement si x et y ont le même nom. C'est une relation d'équivalence.

(b) Soit E un ensemble quelconque et considérons la relation R sur E définie par : xRy si $x = y$ (autrement dit, R est l'égalité sur E). Alors R est une relation d'équivalence ($x = x$, $x = y \iff y = x$ et si $x = y$, $y = z$ alors $x = z$).

(c) Prenons un ensemble E et $f : E \to F$ une fonction. Définissons la relation sur E : xRy si $f(x) = f(y)$. On vérifie que R est une relation d'équivalence sur E.

(d) Les relations d'ordre ne sont pas en général des relations d'équivalence.

Classes d'équivalence et ensemble quotient Soit E un ensemble et R une relation d'équivalence sur E.

1. La *classe d'équivalence de* $a \in E$ est le sous-sensemble de E
$$[a]_R = \{x \in E \,|\, xRa\}.$$
2. Une *classe d'équivalence* de R est un sous-ensemble A de E, tel qu'il existe $a \in E$ vérifiant $A = [a]_R$.
3. L'ensemble des classes d'équivalence est noté E/R et est appelé *l'ensemble quotient de* E *par* R.

Remarque. L'ensemble quotient E/R est un objet de première importance en mathématiques. Il est très important de bien en comprendre la nature : les éléments de E/R sont les classes d'équivalence de R, en d'autres termes, des sous-ensembles de E. Donc $E/R \subseteq \mathcal{P}(E)$.

Une classe d'équivalence n'est jamais vide : $a \in [a]_R$ car aRa.

Exemple. On reprend dans l'ordre les exemples précédents.

(a) E/R est en bijection avec l'ensemble des noms représentés au Québec.

(b) Dans ce cas, les classes d'équivalence sont les singletons de E, c'est-à-dire les sous-ensembles à un élément de E. Donc E/R est en bijection avec E.

(c) Une classe d'équivalence est ici de la forme $[x_0]_R = \{x \in E \,|\, xRx_0\} = \{x \in E \,|\, f(x) = f(x_0)\} = f^{-1}(f(x_0))$, où $x_0 \in E$. Donc $E/R = \{f^{-1}(f(x_0)) \,|\, x_0 \in E\} = \{f^{-1}(y) \,|\, y \in \mathrm{Im}(f)\}$ est en bijection avec $\mathrm{Im}(f)$.

En effet, la fonction $u : E/R \to \mathrm{Im}(f)$ définie par $u([x_0]_R) = u(x_0)$ est une bijection : si $y \in \mathrm{Im}(f)$ et $x \in f^{-1}(y)$ alors $u([x]_R) = f(x) = y$ donc u est surjective. Si $u([x]_R) = u([x']_R)$ alors $f(x) = f(x')$ et donc $x \in [x']_R$. D'où $[x]_R = [x']_R$ et u est injective.

Il faut noter que cette fonction *est bien définie*, i.e., que la relation u est bien une fonction : on vérifie que si $x \in [x_0]_R$ alors $f(x) = f(x_0)$.

Soit R une relation d'équivalence sur E et $x, y \in E$, alors il n'est pas très difficile de montrer que :

1. $x \in [y]_R \iff [x]_R = [y]_R$;
2. $[x]_R \cap [y]_R \neq \varnothing \iff [x]_R = [y]_R$. Autrement dit, deux classes d'équivalence $\lambda, \lambda' \in E/R$ sont disjointes si et seulement si $\lambda \neq \lambda'$.

De plus, l'ensemble quotient E/R forme une partition de l'ensemble E. En particulier, si E est fini alors A/E est fini et

$$|E| = \sum_{A \in E/R} |A|.$$

Remarque. Il est bon de noter que si $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{P}(E)$ est une partition de l'ensemble E, alors on peut construire une unique relation d'équivalence R sur E tel que $E/R = \{A_i \,|\, i \in I\}$: xRy si et seulement si x et y sont dans le même A_i.

Système de représentants des classes d'équivalence Si on prend la relation d'équivalence sur l'ensemble d'un jeu de cartes : deux cartes sont en relation si et seulement si elles ont même couleur. Alors les classes d'équivalences des cartes sont en bijection avec l'ensemble des couleurs : à chaque classe d'équivalence correspond une couleur. C'est là que réside l'idée de système de représentant.

Soit R une relation d'équivalence sur E. Un sous-ensemble I de E est *un système de représentants des classes d'équivalence* de R si la fonction

$$\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & E/R \\ x & \longmapsto & [x]_R \end{array}$$

est une bijection. Les éléments de I sont les *représentants*.

Exemple. Prenons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^2$. Regardons à nouveau la relation d'équivalence sur E : xRy si $f(x) = f(y)$. Alors $I = \mathbb{R}^+$ est un système de représentants des classes d'équivalence de R. En effet, dans chaque classe $A = \{-x, x\} \in E/R$ il n'y a qu'un unique élément positif.

Remarque. I est un système de représentants de E/R si et seulement si pour tout $A \in E/R$ il existe un et un seul $x \in I$ tel que $A = [x]_R$. Cela provient directement des définitions.

Au sujet de la bonne définition de fonction Dans la pratique, on ne vérifie pas souvent si une fonction f est bien définie, c'est-à-dire, que la relation f est bien une fonction. Mais attention, dans certains cas c'est absolument nécessaire. Prenons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^2$. Regardons à nouveau la relation d'équivalence sur E : xRy si $f(x) = f(y)$. Alors $\mathbb{R}/R = \{\{-x, x\} \mid x \in \mathbb{R}^+\}$. Voilà le piège habituel : nous voulons considérer la « fonction ». (C'est certainement une relation, mais une fonction ?)

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}/R & \longrightarrow & \{-, +\} \\ I = [x]_R & \longmapsto & \text{signe de } x \end{array}$$

La faute ici est que l'image de $I = [x]_R = [-x]_R$ dépend du choix du représentant de I choisi : x ou $-x$. Donc si $I \neq \{0\}$, on va avoir deux images $-$ et $+$ et donc g **n'est pas une fonction.**

Conclusion. *Quand on veut définir une fonction f de E/R sur un ensemble F à partir d'un élément x de la classe $\lambda \in E/R$, il faut toujours s'assurer que tous les éléments de la classe λ auront la même image que celle de x !*

Exemple. La fonction

$$\begin{array}{rcl} h : \mathbb{R}/R & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ I = [x]_R & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

est *bien définie* et est une bijection. En effet, si xRx' alors $x^2 = x'^2$ et donc $[x]_R = [x']_R$ n'a qu'une seule image par la relation h qui est donc bien une fonction.

B.4 Exercices

Exercice B.1. Répondre par vraie ou faux aux questions suivantes. Justifier votre réponse.

(1) $\{4, 1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 3, 2, 1\}$; (2) $\{4, 1, 2, 3\} \neq \{1, 2, 3, 4, 3, 2, 1\}$;

(3) $\varnothing \subseteq \{a, b, f, g\}$; (4) $\varnothing \in \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$; (5) $\varnothing \subseteq \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$; (6) $\{\varnothing\} \in \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$;

(7) $\{\varnothing\} \subseteq \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$; (8) $\{\{\varnothing\}\} \in \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$; (9) $\{\{\varnothing\}\} \subseteq \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

Exercice B.2. Soit $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5\}$ et $C = \{2, 3, 4, 5\}$. Ecrire les ensembles suivants :

(a) $\mathcal{P}(A)$; (b) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(B))$; (c) $A \backslash B$; (d) $B \backslash A$; (e) B^c dans C ; (f) $C \backslash A$;

(g) $C \backslash B$; (h) $A \backslash C$; (i) $B \backslash C$.

Exercice B.3. Soit A et B deux ensembles. Montrer que :

1. $A \subseteq B$ si et seulement si $A \cap B = A$.
2. $(A \cup B) \backslash (A \cap B) = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$ (cet ensemble, noté $A \Delta B$, s'appelle la différence symétrique de A et B).

3. $A \cap B = A\backslash(A\backslash B)$. 8. $(A\backslash B) \cap B = \varnothing$. 9. $B\backslash A = B \cap A^c$.

Exercice B.4. Soit A, B et C des ensembles. Montrer que

1. $A \cup B \subseteq A \cup B \cup C$.
2. $A \cap B \cap C \subseteq A \cap B$.
3. $(A\backslash B)\backslash C \subseteq A\backslash C$.
4. $(A\backslash C) \cap (C\backslash B) = \varnothing$.
5. $(B\backslash A) \cup (C\backslash A) = (B \cup C)\backslash A$.

Exercice B.5. (a) Montrer que tout entier naturel est égal au produit d'un nombre impair par une puissance de 2.

(b) Soit $A_n = \{(2k+1) \cdot 2^n \,|\, k \in \mathbb{N}\}$, montrer que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{N}$.

(c) Soit $H_x = [x, +\infty[$, avec $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\bigcap_{x\in\mathbb{R}} H_x = \varnothing$.

Exercice B.6. Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on note $A_i = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, x \leqslant i\}$. Trouver, et justifier par récurrence :

$$(a) \bigcup_{i=1}^{n} A_i \qquad (b) \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

Exercice B.7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$ on note $A_k = \{np + k \,|\, p \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que la famille $\{A_k\}_{0\leqslant k\leqslant n-1}$ forme une partition de $\mathbb{Z}$.

Exercice B.8. Soit $f : E \to F$ une fonction.

1. Si $A_1, A_2 \subseteq E$, montrer que :
   (a) $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$ et trouver un exemple où l'égalité est fausse,
   (b) $A_1 \subseteq A_2 \Longrightarrow f(A_1) \subseteq f(A_2)$.
   (c) Est-ce que $f(A_1\backslash A_2) \subseteq f(A_1)\backslash f(A_2)$? (Trouver un exemple où l'inclusion est fausse).
2. Si $B_1, B_2 \subseteq F$, montrer que :
   (a) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$,
   (b) $B_1 \subseteq B_2 \Longrightarrow f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$,
   (c) $f^{-1}(B_1\backslash B_2) = f^{-1}(B_1)\backslash f^{-1}(B_2)$.
3. Si $A \subseteq E$ et $B \subseteq F$, montrer que $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ et $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.

Exercice B.9. Soit $f : A \to B$ et $g : B \to C$ deux fonctions. Montrer que pour tout $X \subseteq A$ et pour tout $Y \subseteq C$ on a $(g \circ f)(X) = g(f(X))$ et $(g \circ f)^{-1}(Y) = f^{-1}(g^{-1}(Y))$.

Exercice B.10. Soit A_1, A_2, B des ensembles, montrer que

(a) $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ si et seulement si f est injective ;

(b) $f(f^{-1}(B)) = B$ si et seulement si f est surjective.

Exercice B.11. La fonction $f : A \to B$ définie par $f(x) = x^2$ est-elle injective, surjective ou bijective dans les cas suivants :

(a) $A = B = \mathbb{R}$; (b) $A = B = \mathbb{R}^+$; (c) $A = \mathbb{R}^+$ et $B = \mathbb{R}$; (d) $A = \mathbb{R}$ et $B = \mathbb{R}^+$.

Exercice B.12. Soit $f : A \to B$ et $g : B \to C$ deux fonctions. Montrer que

(a) f et g injectives $\Longrightarrow g \circ f$ injective ;

(b) f et g surjectives $\Longrightarrow g \circ f$ surjective ;

(c) $g \circ f$ injective $\Longrightarrow f$ injective ;

(d) $g \circ f$ surjective $\Longrightarrow g$ surjective ;

(e) $g \circ f$ injective et f surjective $\Longrightarrow g$ injective.

Exercice B.13. Soit $f : E \to F$ une fonction.

(a) Montrer que f est injective si et seulement si $f^{-1}(y)$ est un singleton pour tout $y \in \mathrm{Im}(F)$.

(b) Montrer que f est surjective si et seulement si pour tout $y \in F$ il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$.

(c) Montrer que f est bijective si et seulement si $f^{-1}(y)$ est un singleton pour tout $y \in F$.

(d) On considère $f_0 : E \to f(E)$ définie par $f_0(x) = f(x)$. Montrer que f_0 est surjective et que f_0 est une bijection si et seulement si f est injective.

Exercice B.14.

1. Soit $\beta : A \to B$ et $\alpha : B \to C$ des fonctions. Montrer que :
   (a) $\alpha \circ \beta$ injective $\Longrightarrow \beta$ injective.
   (b) $\alpha \circ \beta$ surjective $\Longrightarrow \alpha$ surjective.
2. Soit $f : E \to F$, $g : F \to G$, $h : G \to E$ des fonctions. On suppose que la fonction $h \circ g \circ f$ est surjective et que les fonctions $g \circ f \circ h$ et $f \circ h \circ g$ sont injectives.
   (a) Montrer que h est inversible.
   (b) Montrer que $g \circ f$ est bijective.
   (c) Montrer que f, g et h sont des bijections.

Exercice B.15. Soit $f : A \to B$ une fonction, montrer que

(a) Si $|A| = 1$ alors f est injective. (b) Si $|B| = 1$, A est non vide, alors f est surjective.

Exercice B.16. (a) Montrer que $\mathbb{N}$ est infini. (b) Soit $A \subseteq E$ deux ensembles. Montrer que si E est fini alors A est fini et que $|A| \leqslant |E|$; et montrer que si A est infini alors E est infini.

Exercice B.17. Soit A et B deux ensembles finis.

1. Montrer que $|A| \leqslant |B|$ si et seulement si il existe une injection $i : A \to B$.
2. Montrer que $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.
3. Montrer que $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.
4. Montrer que $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

5. On note B^A l'ensemble des fonctions de A dans B. Cette notation est expliquée par le résultat suivant : montrer par récurrence sur $|A|$ que $|B^A| = |B|^{|A|}$.

Exercice B.18. Soit $\sim$ la relation sur $\mathbb{R}$ définie par : $x \sim y$ si $|x| = |y|$.

(a) Montrer que c'est une relation d'équivalence et déterminer son ensemble quotient $\mathbb{R}/\sim$.

(b) Montrer que $\mathbb{R}^+$ est un système de représentants des classes d'équivalence de $\sim$.

(c) Les fonctions ci-dessous sont-elles bien définies ? Justifier !

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}/\sim & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ [x]_\sim & \longmapsto & x \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}/\sim & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ [x]_\sim & \longmapsto & |x| \end{array}$$

Exercice B.19. Sur l'ensemble $E = \{1, 2, 3, \ldots, 30\}$ définissons la relation R par : iRj si tout nombre premier p qui divise i divise aussi j. Vérifier que R est bien une relation d'équivalence, écrire l'ensemble quotient et trouver un système de représentants.

Exercice B.20. Soit $\{A_i\}_{i\in I}$ une partition de l'ensemble E et R la relation sur E définie par xRy si et seulement si x et y sont dans le même A_i. Montrer que R est une relation d'équivalence et que $E/R = \{A_i \,|\, i \in I\}$.

Exercice B.21. Soit R_1, R_2 deux relations d'équivalence sur E. Montrer que la relation R sur E définie par : xRy si (xR_1y et xR_2y) est une relation d'équivalence. Décrire les classes d'équivalence de R en fonction de celles de R_1 et de R_2.

Annexe C

Autres exemples d'actions de groupes

C.1 Actions linéaires

Pour une action $G \times V \to V$, où V est un espace vectoriel (sur $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, etc.), on dit que l'action est **linéaire** si (en plus des axiomes d'actions) on a

(a) $g \cdot (x + y) = g \cdot x + g \cdot y$, pour tout $x, y \in V$ et $g \in G$, et

(b) $g \cdot (\alpha\, x) = \alpha\, (g \cdot x)$, pour tout x, g, et α un scalaire.

On dit aussi d'une telle action que c'est une **représentation linéaire** du groupe G, et on parle de la représentation [1] V. Si G agit sur deux espaces vectoriels V et W, alors on a une action linéaire de G sur l'espace vectoriel $V \oplus W$, définie en posant $g \cdot (v + w) := g \cdot v + g \cdot w$. Dans ce cas, on dit qu'on a une **somme** d'actions. Bien entendu, on a la somme de plusieurs actions. Tout comme dans le cas des actions, un **isomorphisme** allant d'une action linéaire $G \times V \to V$ à une action linéaire $G \times W \to W$ est une transformation linéaire inversible $\theta : V \to W$, telle qu'on ai le diagramme **commutatif**

$$\begin{array}{ccc} G \times V & \longrightarrow & V \\ {\scriptstyle \mathrm{Id} \times \theta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \theta} \\ G \times W & \longrightarrow & W, \end{array}$$

ce qui signifie que $g \cdot \theta(v) = \theta(g \cdot v)$, pour tout $v \in V$ et tout $g \in G$. L'étude et la classification des actions linéaires (à isomorphisme près) font l'objet de la théorie de la représentation des groupes, qui est un domaine de recherche particulièrement actif. Pour un groupe fini, les deux théorèmes de base de la théorie [2] affirment d'abord que toute action se décompose de manière unique (à isomorphisme

1. Malgré le fait qu'on puisse avoir deux actions différentes sur le même espace V, c'est l'habitude dans le domaine de s'exprimer ainsi. Dans la plupart des cas, cela ne porte pas à confusion.

2. Pour des espaces vectoriels sur des corps de caractéristique 0. Le cas de caractéristique fini est aussi connu, mais la théorie est plus complexe.

près) en une somme d'actions dites « irréductibles » ; puis qu'il y a un nombre fini (à isomorphisme près) d'actions irréductibles, pour chaque groupe G. Le nombre de ces actions irréductibles est égal au nombre de classes de conjugaison d'éléments du groupe. En un certain sens, c'est une version plus riche du fait qu'on a une partition en orbites pour un ensemble muni d'une action. Par exemple, une action du groupe des permutations S_3 agit sur $\mathbb{R}^3$ correspond à poser

$$\sigma \cdot (x_1, x_2, x_3) := (x_{\sigma^{-1}(1)}, x_{\sigma^{-1}((2)}, x_{\sigma^{-1}(3)}).$$

La présence de l'inverse assure qu'on a bien une action. En effet, on calcule qu'on a bien

$$\begin{aligned}
\tau \cdot (\sigma \cdot (x_1, x_2, x_3)) &= \tau \cdot (y_1, y_2, y_3), \qquad \text{où} \qquad y_i = x_{\sigma^{-1}(i)} \\
&= (y_{\tau^{-1}(1)}, y_{\tau^{-1}(2)}, y_{\tau^{-1}(3)}), \\
&= (x_{\sigma^{-1}(\tau^{-1}(1))}, x_{\sigma^{-1}(\tau^{-1}(2))}, x_{\sigma^{-1}(\tau^{-1}(3))}, \\
&= (x_{(\tau\sigma)^{-1}(1)}, x_{(\tau\sigma)^{-1}(2)}, x_{(\tau\sigma)^{-1}(3)}, \\
&= (\tau\sigma) \cdot (x_1, x_2, x_3).
\end{aligned}$$

La linéarité est évidente. La décomposition de cette action en action irréductible correspond à décomposer l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ en somme directe de deux sous-espaces V et W, où

(a) $V = \{(x, x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$, autrement dit une droite de $\mathbb{R}^3$;

(b) $W = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}$, autrement dit un plan orthogonal à la droite V.

L'invariance de ces sous-espaces se déduit facilement de la définition. Comme V est de dimension 1, il est forcément irréductible. On montre aussi que W est irréductible. Une autre façon d'envisager tout ceci est de constater que tout vecteur s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de la forme

$$(x, y, z) = a\,(1, 1, 1) + b\,(1, -1, 0) + c\,(1, 0, -1),$$

où il suffit de poser

$$a = (x + y + z)/3, \qquad b = (x - 2\,y + z)/3, \qquad \text{et} \qquad c = (x + y - 2\,z)/3.$$

L'effet de toute permutation sur (x, y, z) est de la forme

$$\sigma \cdot (x, y, z) = a\,(1, 1, 1) + b_\sigma\,(1, -1, 0) + c_\sigma\,(1, 0, -1),$$

pour certaines (jolies) expressions b_σ et c_σ. Le calcul des expressions en question est un exercice intéressant et important à savoir-faire pour d'autres contextes du genre. C'est un des défis de la théorie de la représentation des groupes. Par exemple, la théorie de la représentation des groupes cycliques mène à la notion de transformée de Fourier discrète pour effectuer ces calculs.

Invariants polynomiaux. Une famille d'exemples particulièrement importante consiste à considérer les groupes finis de matrices $n \times n$ agissant sur les polynômes à n variables. On a donc $G \leqslant \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ un tel groupe, avec

$$g = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

qui agit sur un polynôme $f(z_1, z_2, \dots, z_n)$, en remplaçant dans f les variables z_i par

$$z_i \mapsto a_{1i}z_1 + a_{2i}z_2 + \ldots + a_{ni}z_n.$$

On dit alors qu'un polynôme f est **G-invariant** si et seulement si on a $g \cdot f = f$, pour tout élément g du groupe G. Cette notion joue un rôle fondamental en théorie de Galois et dans une foule d'autres domaines (comme en physique). En particulier, si G est le groupe des matrices de permutations (c.-à-d. dont les coefficients a_{ij} sont tous 0, sauf un 1 par ligne et un 1 par colonne), on dit des polynômes G-invariants qu'ils sont symétriques, et l'action du groupe correspond à permuter les variables. Plus explicitement, pour $n = 3$, un polynôme $f(x, y, z)$ est symétrique, si et seulement si

$$f(x, y, z) = f(x, y, z) = f(y, x, z) = f(y, z, x) = f(z, x, y) = f(z, y, x),$$

et on a les exemples suivants de tels polynômes

$$\begin{array}{rcl} e_1(x, y, z) & = & x + y + z, \\ e_2(x, y, z) & = & x\,y + x\,z + y\,z \\ e_3(x, y, z) & = & x\,y\,z. \end{array} \tag{C.1}$$

Le cas $n = 3$ du théorème fondamental des polynômes symétriques, dû à Newton [3], affirme que tout polynôme symétrique $f(x, y, z)$ s'exprime comme somme de produit des trois polynômes e_1, e_2, et e_3 ci-dessus. Par exemple, on voit facilement que

$$D(x, y, z) = (x - y)^2(x - z)^2(y - z)^2 \tag{C.2}$$

est un polynôme symétrique. Le théorème de Newton assure qu'on peut trouver une expression pour $D = D(x, y, z)$ en terme de e_1, e_2, et e_3. On trouve en effet que

$$D = e_1^2e_2^2 + 18\,e_1e_2e_3 - 4\,e_2^3 - 4\,e_1^3e_3 - 27\,e_3^2. \tag{C.3}$$

C'est le **discriminant** (l'analogue de $b^2 - 4a\,c$) pour les polynômes de degré 3. Plus explicitement, le polynôme en la variable t

$$(t - x)(t - y)(t - z) = t^3 - e_1\,t^2 + e_2\,t - e_3,$$

3. Sir Issac Newton (1643-1727).

a (au moins) deux racines[4] égales si et seulement si son discriminant est nu, $D = 0$. On observe que l'expression des coefficients e_1, e_2, et e_3 du polynôme (attention aux signes), en terme de ses racines, donne précisément les expressions (C.1). Par exemple, pour le polynôme $t^3 + 3\,t^2 - 9\,t + 5$, on a $e_1 = -3$, $e_2 = -9$, et $e_3 = -5$. A priori, on ne connaît pas ses racines, et on ne peut utiliser la formule (C.2) pour calculer le discriminant. Par contre, la formule (C.3) est facilement calculable, et on trouve

$$D = (-3)^2(-9)^2 + 18\,(-3)(-9)(-5) - 4\,(-9)^3 - 4\,(-3)^3(-5) - 27\,(-5)^2 = 0.$$

On conclut donc que le polynôme a deux racines égales que l'on ne connaît toujours pas. Autrement dit, le polynôme est de la forme $(t-a)^2(t-b)$, pour certaines valeurs de a et de b qu'on pourrait chercher à trouver, si on le désire.

C.2 Le groupe des isométries du cube

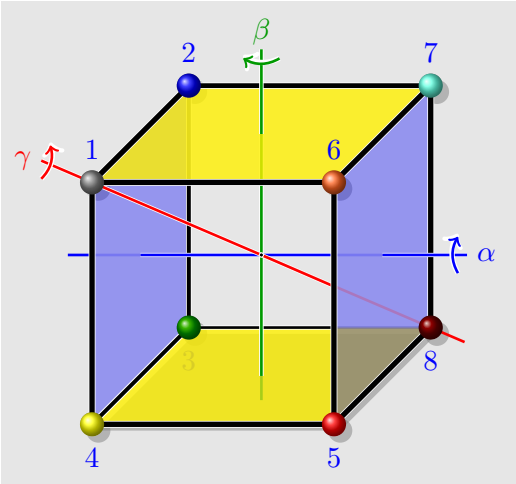


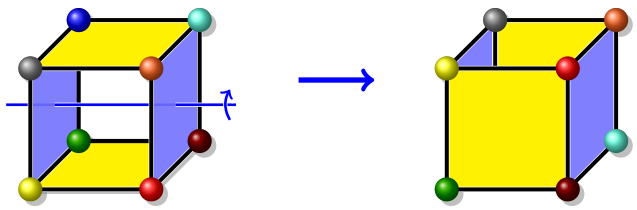
FIGURE C.1 – Rotations du cube.

On considère un cube $\mathcal{C}$ comme une partie de $\mathbb{R}^3$, avec l'action naturelle du groupe des isométries $\mathrm{ISO}_{\mathbb{R}^3}$, sur $\mathbb{R}^3$. Cette action donne aussi une action de $\mathrm{ISO}_{\mathbb{R}^3}$ sur l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$ des parties de $\mathbb{R}^3$

$$\mathrm{ISO}_{\mathbb{R}^3} \times \mathcal{P}(\mathbb{R}^3) \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^3),$$

pour laquelle on ne conserve que les isométries qui préservent le cube, c'est-à-dire le stabilisateur de $\mathcal{C}$ pour cette action. Nous allons déterminer ce groupe à isomorphisme près. Puisque les distances et les angles sont conservés par le groupe, on peut considérer que G permute les sommets entre eux. Ceci permet de considérer G comme un groupe de permutation des sommets, via le morphisme de restriction $\rho : G \to S_8$, où $\rho(g) := g\,|_{\{\text{sommets}\}}$. Un premier élément de G est α, la rotation d'angle $\pi/2$ autour de l'axe vertical passant par le centre des faces 1234 et 5678. Comme permutation, décomposée en cycles, α s'exprime comme

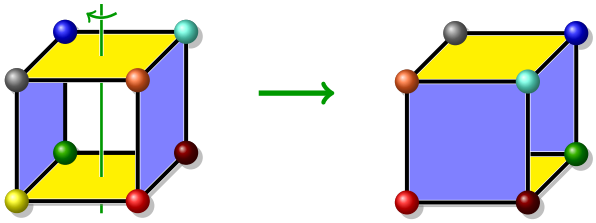
$$\alpha = (1234)(5678).$$



4. Ce sont ici x, y et z.

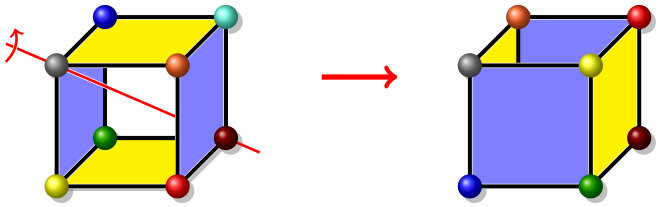
C'est donc un élément d'ordre 4. De même, on a la rotation β, d'angle $\pi/2$ autour de l'axe vertical passant par le centre des faces 1276 et 4385, qui s'exprime comme la permutation d'ordre 4

$$\beta = (1276)(4385).$$



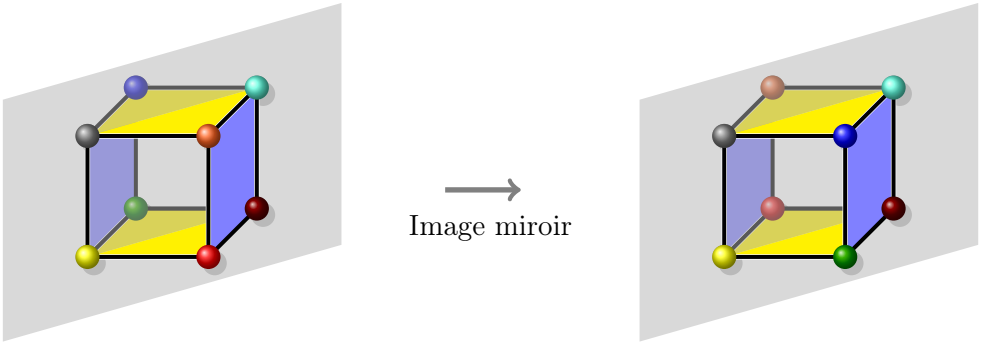
De plus, on considère γ, la rotation d'angle $2\,\pi/3$ autour de l'axe qui passe par les points 1 et 8, telle que

$$\gamma = (246)(357).$$



C'est donc un élément d'ordre 3, avec 1 et 8 comme points fixes ; et on calcule que $\gamma^2 = (264)(375)$. Le groupe engendré par α, β et γ donne toutes les isométries du cube qui en respecte l'orientation [5]. Restent les « réflexions » du cube, c.-à-d. les isométries d'ordre 2 qui renverse l'orientation. Pour les obtenir, il suffit d'ajouter la réflexion par rapport au plan 1487, dont la décomposition cyclique est

$$\delta := (26)(35),$$



5. Quand on situe sa main droite en 1, avec l'index et le pouce pointant respectivement vers 2 et 4, alors le majeur pointe vers 6. Pour l'orientation inverse, on utilise la même règle avec la main gauche.

et dont les points fixes sont 1, 4, 7 et 8. On veut vérifier que le groupe G est engendré par α, β, γ, et δ. Pour le voir, considérons l'orbite du sommet 1 ; on a clairement

$$\alpha(1) = 2, \quad \alpha^2(1) = 3, \quad \alpha^3(1) = 4,$$
$$\beta(1) = 2, \quad \beta^2(1) = 7, \quad \beta^3(1) = 6,$$

et on calcule directement que

$$\alpha\beta^2 = (18)(27)(36)(45), \qquad \text{et} \qquad \alpha^2\beta^2 = (15)(28)(37)(46),$$

d'où $\alpha\beta^2(1) = 8$, et $\alpha^2\beta^2(1) = 5$. On s'ensuit que l'orbite de 1 est

$$\mathrm{Orb}(1) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}.$$

Autrement dit, il a une seule orbite pour l'action de G. C'est donc une action transitive. En vertu du théorème sur les actions transitives, on a que

$$8 = |\,\mathrm{Orb}(1)\,| = [G : \mathrm{Stab}(1)] = |G|/|\,\mathrm{Stab}(1)\,|,$$

il suffit donc de calculer $|\,\mathrm{Stab}(1)\,|$ pour connaître l'ordre de G. On sait que γ et δ fixent 1, et donc $\mathrm{Stab}(1)$ contient le sous-groupe qu'ils engendrent. Comme $\gamma^3 = e$ et $\delta^2 = e$, il suffit de vérifier par calcul direct qu'on a

$$\gamma\delta = (37)(46) = \delta\gamma^2, \qquad \gamma^2\delta = (24)(57) = \delta\gamma,$$

pour conclure qu'on a (au moins [6]) les 6 éléments distincts suivants dans $\mathrm{Stab}(1)$:

$$e, \quad \gamma, \quad \gamma^2, \quad \delta, \quad \gamma\delta, \quad \text{et} \quad \delta\gamma.$$

On constante donc que $|\,\mathrm{Stab}(1)\,| \geqslant 6$, ce qui entraîne que $|G| \geqslant 48$.

Nous allons obtenir une borne supérieure pour l'ordre de G, grâce à un théorème d'un chapitre ultérieur. On remarque que les isométries du cube échangent entre elles les diagonales de ce cube. En effet, une isométrie envoie les paires de points les plus éloignés du cube dans des paires de points de la même nature. Les diagonales sont précisément les segments dont les extrémités sont de telles paires. On peut donc considérer la restriction de G au groupe des permutations de ces quatre diagonales. Celles-ci correspondent aux quatre sous-ensembles de paires de sommets $\{1, 8\}$, $\{2, 5\}$, $\{3, 6\}$ et $\{4, 7\}$. On a donc un morphisme

$$\theta : G \to S_\Gamma, \qquad \text{pour} \qquad \Gamma := \{\{1, 8\}, \{2, 5\}, \{3, 6\}, \{4, 7\}\},$$

obtenu en posant

$$\theta(g)(\{i, j\}) := \{g(i), g(j)\}.$$

Soit

$$\sigma := (18)(25)(36)(47),$$

6. En fait il n'y en a pas d'autres, mais nous n'avons pas besoin de le savoir aux fins de l'argument.

l'application **antipode** par rapport au centre du cube. C'est un élément de G, qui laisse globalement fixe chaque diagonale de sorte que sa restriction à l'ensemble des quatre diagonales est l'application identité. D'autre part, soit g est un élément de G tel que $\theta(g) = e$ autre que l'identité. Comme $g \neq e$, on peut choisir i tel que $g(i) \neq i$. Pour fixer les idées, disons que $i = 2$. On a $\theta(g)(\{i, j\}) = \{i, j\}$, pour toutes les diagonales. En particulier, $\theta(g)(\{2, 5\}) = \{g(2), g(5)\} = \{2, 5\}$, et donc $g(2) = 5$ (puisqu'on a supposé $g(2) \neq 2$). Comme on doit aussi conserver les autres distances, par exemple celle entre 1 et 2, on doit avoir que $g(1)$ est voisin de $g(2)$. Cela force $g(1) = 8$. De même on trouve $g(3) = 6$ et $g(4) = 7$. On trouve donc que g est forcément égal à σ. On a donc $\ker(\theta) := \{e, \sigma\} = \{g \in G \mid \theta(g) = e\}$ (nous allons revenir plus tard sur cette notation).

Par le théorème des isomorphismes (voir 4.4), on obtient

$$|G|/|\ker(\theta)| = |G/\ker(\theta)| \leqslant |S_\Gamma|$$

Dans notre cas, cela correspond à $|G|/2 \leqslant 24$. En conclusion globale, on trouve qu'il y a $|G| = 48$ isométries du cube.

C.3 A_5 comme groupe des rotations du dodécaèdre

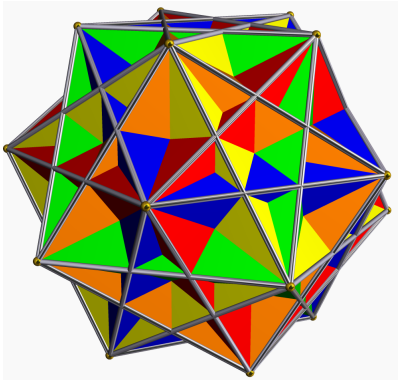


FIGURE C.2 – Les cinq cubes inscrits dans le dodécaèdre.

Le groupe des rotations du dodécaèdre est isomorphe au groupe alterné A_5. Pour le voir, on raisonne comme suit. Pour chaque diagonale d'une face (joignant un sommet à un sommet de cette face qui ne lui est pas immédiatement voisin), on a un et un seul cube inscrit dans le dodécaèdre dont un côté correspond à cette diagonale. En fait, les 12 côtés de ce cube correspondent à une diagonale dans chacune des 12 faces du dodécaèdre. Comme chaque face (pentagonale) du dodécaèdre contient 5 diagonales, il y a 5 cubes différents inscrits dans le dodécaèdre (voir Figures C.3 et C.4). On les nomme $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, et cela se répercute en une façon d'étiqueter les diagonales ; en donnant à chaque coté d'un cube l'étiquette du cube. Chaque rotation du dodécaèdre envoie un cube inscrit dans un cube inscrit, puisqu'elle respecte les longueurs et les angles, et cela donne une permutation des 5 valeurs des étiquettes des diagonales. D'autre part, deux rotations sont différentes si et seulement si elles font effectuer des permutations différentes aux 5 cubes. Manifestement, le composé de rotations correspond au composé des permutations de cubes correspondantes. On a donc un monomorphisme du groupe des rotations du dodécaèdre vers le groupe S_5, et on cherche à montrer que l'image de ce monomorphisme est le sous-groupe alterné A_5. Par le premier théorème d'isomorphisme, on pourra alors conclure que le groupe des rotations du dodécaèdre est isomorphe au groupe alterné A_5.

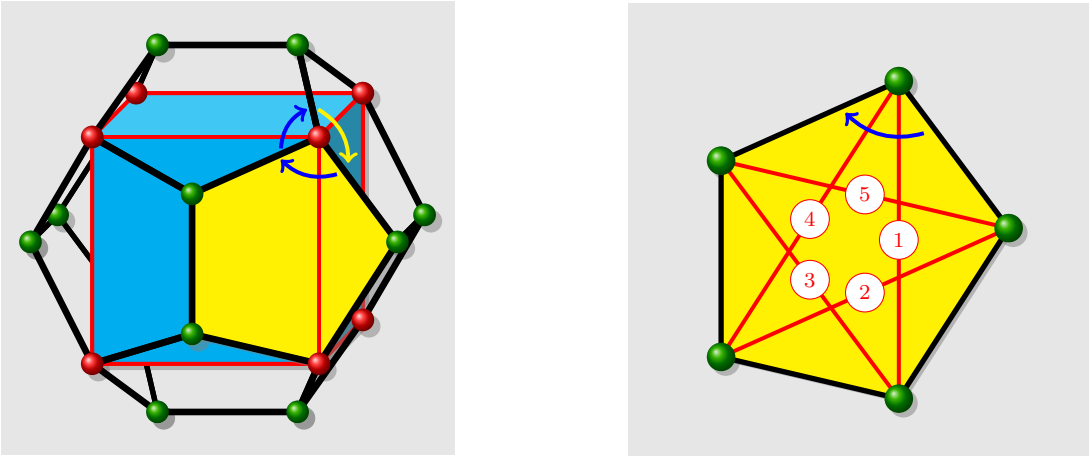


FIGURE C.3 – Une rotation du dodécaèdre autour de l'axe joignant deux sommets opposés, et la permutation des 5 cubes correspondante.

On considère une rotation horaire de $2\pi/3$ autour de l'axe joignant un sommet au sommet diamétralement opposé dans le dodécaèdre. Cette rotation laisse fixes (en leur faisant effectuer une rotation) exactement deux des 5 cubes inscrits. En effet, ce sont les deux cubes pour lesquels cet axe est aussi une grande diagonale ; ou encore, ce sont les deux cubes dont l'un des sommets est sur l'axe de rotation. Les 3 autres cubes sont permutés entre eux, et la seule possibilité est que c'est selon une permutation cyclique de longueur 3. Pour la rotation de la figure C.3, les cubes numérotés 1 et 4, selon les diagonales du pentagone de la partie droite de la figure, sont laissés fixes. Les 3 autres cubes sont permutés selon la permutation cyclique (235).

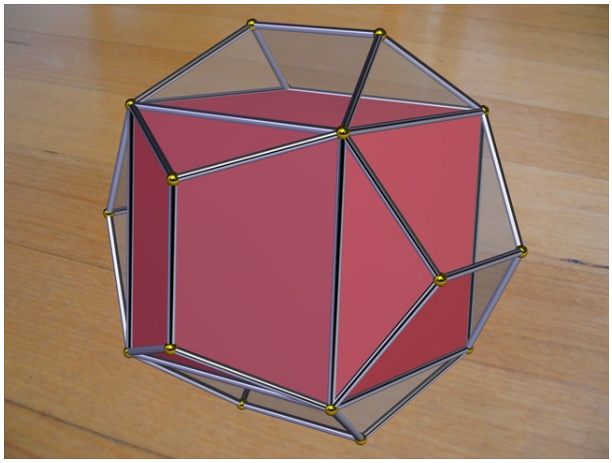


FIGURE C.4 – Version réaliste d'un cube inscrit dans le dodécaèdre.

Le dodécaèdre possède 20 sommets, et il leurs correspond 20 rotations horaires de $2\pi/3$, comme celle décrite ci-dessus. À chacune de ces 20 rotations, on associe une permutation cyclique de longueur 3, et il y en a 20 différentes (puisque les 20 rotations sont différentes). Or, il y a exactement $20 = 2\binom{5}{3}$ permutations cycliques de longueur 3 dans S_5, qui correspondent à choisir 3 des éléments de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ avec deux cycles pour chaque choix. Il s'ensuit qu'on obtient exactement toutes les permutations cycliques de longueur 3 de S_5, en considérant les rotations décrites ci-haut. Bien entendu, en composant ces rotations on obtient d'autres rotations du dodécaèdre qui permutent les cubes selon d'autres permutations. Nous voulons voir qu'il en a 60, et qu'elles correspondent aux soixante permutations dans A_n.

Le fait qu'il y a (au plus) 60 rotations du dodécaèdre est facile à établir. On choisit deux sommets adjacents A et B, et on « suit leurs traces ». Une rotation θ envoie le sommet A sur n'importe lequel des 20 autres sommets, et le sommet B sur l'un des 3 voisins de l'image de $\theta(A)$. Le choix de ce second sommet fixe la rotation. Il y a donc (au plus) 60 rotations possibles du dodécaèdre. Nous allons montrer ci-dessous (voir Lemme C.1) que le sous-groupe A_5 est engendré par les permutations cycliques de longueur 3. En vertu de notre raisonnement ci-haut, il y a donc exactement 60 rotations du dodécaèdre, qui constituent (pour la composition) un groupe isomorphe à A_5.

Lemme C.1. *Le sous-groupe alterné A_n, du groupe des permutations S_n, est engendré par les permutations cycliques de longueur* 3.

Démonstration. Par définition A_n contient toutes les permutations cycliques de longueur 3, puisque leur signe est positif. Pour voir qu'elles engendrent tout A_n, on rappelle que toute permutation peut s'exprimer comme produit de transpositions de la forme $(1a)$ (voir Exercice 1.34), et que celles qui sont dans A_n s'expriment (par définition) comme un produit d'un nombre pair de ces transpositions, qui peuvent donc être regroupées deux par deux. Or, le produit $(1a)(1b)$ est égal à la permutation cyclique $(1ba)$. On a donc bien une expression de tout élément de A_n comme produit de cycles de longueur 3, tel qu'annoncé. ∎

L'intuition derrière la preuve de la proposition suivante découle du fait que A_5 est le groupe des rotations du dodécaèdre.

Proposition C.2. *A_5 est un groupe simple.*

Démonstration. Voir exercice 4.31. ∎

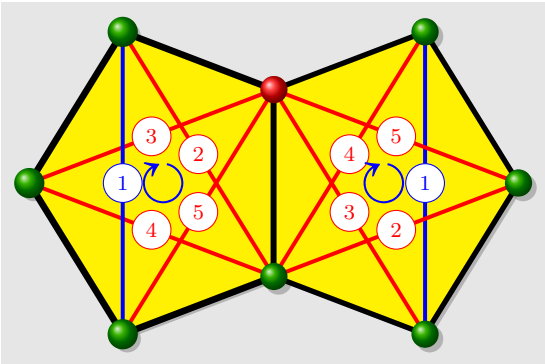


FIGURE C.5 – Permutation des 5 cubes, pour une rotation du dodécaèdre selon des faces.

Les rotations d'ordre 5 du dodécaèdre correspondent aux rotations autour de l'axe perpendiculaire à l'une des faces du dodécaèdre, qui est aussi perpendiculaire à la face opposée. Ces rotations permutent de façon circulaire les cinq cubes inscrits. On a exactement 24 telles rotations, qui correspondent aux 6 façons de choisir deux faces opposées, avec 4 rotations (différentes de l'identité) pour chacun de ces choix. Or, il y a 24 permutations cycliques dans S_5, toutes appartenant à A_5. Pour deux faces adjacentes, comme à la figure ci-contre, le produit des permutations en question est une permutation cyclique d'ordre 3, ce qui nous ramène au cas déjà montré. L'exemple ci-contre illustre ce fait, avec

$$(13254) \circ (12345) = (153).$$

Enfin, les rotations d'angle π autour de l'axe reliant le centre d'un côté du dodécaèdre au côté opposé, sont celles qui correspondent au type cyclique 221 (d'ordre 2). Par exemple, avec les deux faces de la figure ci-dessus et la rotation selon le centre du côté qu'elles partagent, on obtient la permutation des diagonales (23)(45), avec la diagonale 1 laissée fixe (puisqu'on fait tourner le cube correspondant à 1 d'un angle π autour de l'axe qui relie le centre d'une de ses faces au centre de la face opposée). En composant deux telles rotations, pour des côtés issus d'un même sommet, on trouve une permutation cyclique d'ordre 5. On est encore une fois réduit au cas précédent. Par exemple, prenant le côté à la

droite du sommet rouge de la figure, on trouve la rotation correspondant à la permutation (15)(34), et le composé donne (13524). ■

C.4 Espaces homogènes

Dans son « programme d'Erlangen » de 1878, Felix Klein propose d'approcher systématiquement la géométrie via la théorie des groupes. Cela correspond à des actions transitives de groupes. Plus précisément, on suppose que E est un **espace topologique** sur lequel un groupe G agit transitivement. Intuitivement, le groupe détermine la géométrie de E. Comme, par transitivité de l'action, on peut passer de n'importe quel point $x \in E$ à n'importe quel autre point $y = g \cdot x$, on dit que l'espace E est **homogène** parce que tous les points se « comporte » de la même façon. Utilisant le Théorème 3.8, la construction d'espaces homogènes se ramène à choisir un groupe G, et un sous-groupe H de G. Parmi les groupes qui jouent un rôle particulièrement intéressant dans ce contexte, on retrouve les groupes de Lie GL_n, $O(n)$, ou encore GA_n (le groupe général affine). Ainsi, la géométrie de la sphère correspond à $O(n)/O(n-1)$, et la géométrie affine à GA_n/GL_n.

Au 7e congrès international de mathématiques, qui a eu lieu en 1924 à Toronto, le mathématicien français Elie Cartan à fait une présentation invitée intitulée *La théorie des groupes et les recherches récentes en géométrie différentielles*. On a accès sur le web à cette référence historique, expliquant pour un public général cette approche et ses liens avec la théorie de la relativité. La section suivante approfondie, dans un cas particulier, certaines questions reliées à ce sujet.

C.5 Le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$

Le groupe des matrices $n \times n$, à coefficients entiers et de déterminant 1, est dénoté $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$. Le cas particulier $n = 2$ est déjà très intéressant. On peut montrer qu'il est engendré par les matrices

$$S := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{et} \qquad T := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

avec les relations $S^4 = \mathrm{Id}$, et $(ST)^6 = \mathrm{Id}$. La matrice T est d'ordre infini, puisque

$$T^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{pour tout} \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Comme $T = S^3\,(ST)$, le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est aussi engendré par les deux matrices S et ST.

On observe que

$$S \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix}, \qquad \text{et} \qquad T^n \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+nc & b+nd \\ c & d \end{pmatrix}.$$

On peut exploiter ceci, et la division euclidienne dans $\mathbb{Z}$, pour déterminer comment écrire toute matrice de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ comme produit de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n_k \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

avec $n_i \in \mathbb{Z}$. Pour trouver une telle expression, on procède avec l'algorithme suivant [7], en faisant agir le groupe sur lui-même par multiplication à gauche. Si $c \neq 0$ et $|a| \geqslant |c|$, applicant la division euclidienne de a par c, on trouve q et r tels que $a = qc + r$, avec $|c| > r \geqslant 0$. Alors, on observe que

$$T^{-q} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & b - qd \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \text{et donc} \qquad ST^{-q} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & -d \\ r & b - qd \end{pmatrix}.$$

On réapplique l'étape précédente, jusqu'à ce qu'on se retrouve dans le cas $c = 0$. Or, les seules matrices dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ sont les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} -1 & n \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = S^2 T^n,$$

puisque leur déterminant est $ad = 1$, ce qui force $a = d = 1$ ou $a = d = -1$. Par exemple, on trouve ainsi que

$$\begin{pmatrix} 17 & 46 \\ 7 & 19 \end{pmatrix} = T^2 S T^{-3} S T^{-2} S T^{-2} S T^2 S^2.$$

Action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sur le plan hyperbolique. Sans tenir compte de l'aspect géométrique, une réalisation du plan hyperbolique $\mathbf{H}$ est simplement l'ensemble des nombres complexes dons la partie imaginaire est positive :

$$\mathbf{H} := \{z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}, \quad y \geqslant 0\}.$$

Pour chaque matrice dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, on a une transformation, dite de **Möbius** [8], du plan hyperbolique, qui correspond à

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z := \frac{az + b}{cz + d}. \tag{C.4}$$

7. C'est essentiellement l'algorithme d'Euclide.
8. August Ferdinand Mobius (1790-1868). Voir le vidéo expliquant les transformations de Möbius.

Comme on calcule que

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \cdot z \right) &= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} \right) \\
&= \frac{a_1(a_2 z + b_2)/(c_2 z + d_2) + b_1}{c_1(a_2 z + b_2)/(c_2 z + d_2) + d_1} \\
&= \frac{a_1(a_2 z + b_2) + b_1(c_2 z + d_2)}{c_1(a_2 z + b_2) + d_1(c_2 z + d_2)} \\
&= \frac{(a_1 a_2 + b_1 c_2) z + (a_1 b_2 + b_1 d_2)}{(c_1 a_2 + d_1 c_2) z + (c_1 b_2 + d_1 d_2)} \\
&= \begin{pmatrix} a_1 a_2 + b_1 c_2 & a_1 b_2 + b_1 d_2 \\ c_1 a_2 + d_1 c_2 & c_1 b_2 + d_1 d_2 \end{pmatrix} \cdot z
\end{aligned}$$

C'est bien une action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathbf{H}$, puisqu'on vérifie aussi par calcul direct que $A \cdot z$ est dans $\mathbf{H}$, pour

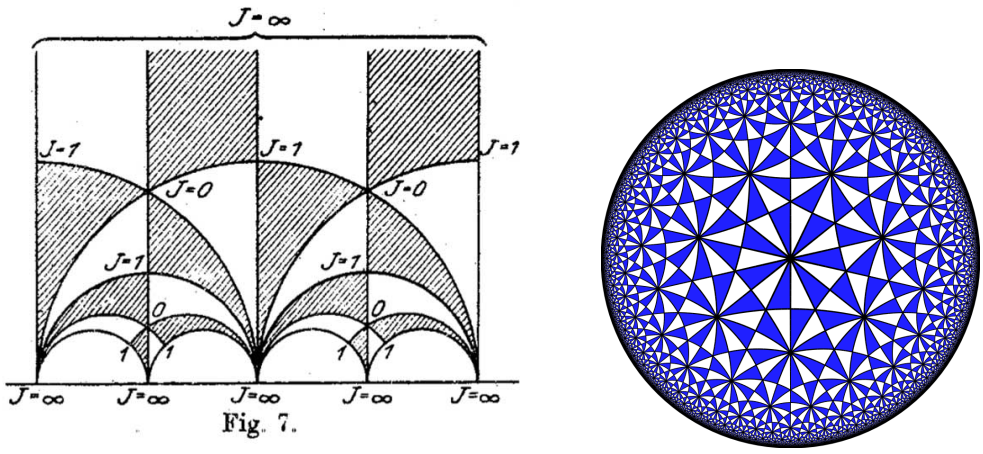


FIGURE C.6 – SL_2-pavage de Klein du plan hyperbolique, et sa version circulaire.

tout $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. On remarque, pour A dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, la matrice $(-A)$ donne la même transformation que A, c.-à-d. $A \cdot z = (-A) \cdot z$. Travailler modulo l'identification de ces deux matrices donne lieu au groupe modulaire. Les transformations qui correspondent aux générateurs S et T sont respectivement

$$S : z \mapsto -1/z, \qquad \text{et} \qquad T : z :\mapsto z + 1,$$

et ces transformations engendrent toutes celles qui correspondent à (C.4). Chaque orbite de cette action contient un et un seul élément dans la région

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |\Re(z)| < 1/2,\ |z| > 1\},$$

et le plan $\mathbf{H}$ se pave avec des copies de cette région selon l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, comme l'illustre la Figure C.6 dûe à Klein [9], dont il attribue l'idée à Dedekind [10].

9. *Uber die Transformation der elliptischen Funktionen und die Auflosung der Gleichungen funften Grades*, Mathematische Annalen, 1878.

10. Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916).

Bibliographie

[1] F. Bergeron, P. Leroux, et G. Labelle, *Combinatorial Species and Tree-like Structures*, Encyclopedia of Mathematics, Cambridge University Press, 1998. 497 pages.
Une rééddition des premiers chapitres est disponible sur le web. C'est la théorie développée à l'UQAM, présentée pour le niveau des études avancées. Une introduction plus accessible est donnée au chapitre 6 des notes Introduction à la combinatoire algébrique. Cependant, pour l'aspect théorie de Pôlya, il faut voir la version papier complète du livre.

[2] F. Bergeron et C. Hohlweg, *Arithmétique et géométrie classique*, disponible sur le web, 2014. 262 pages.

[3] J. Calais, *Eléments de théorie des groupes*, Presses Universitaires de France, 1984. (QA174.2C25)

[4] E. Cartan, *La théorie des groupes et les recherches récentes en géométrie différentielles*, Congrès international de Mathématiques, Toronto, août 1924. Voir sur le web cette référence historique, expliquant entre autres certains liens avec la théorie de la relativité.

[5] N. Carter, *Visual Group Theory*, MAA's Classroom Ressource Material series, 2009. Disponible en version papier et électronique. Il s'accompagne d'un logiciel libre qui permet d'explorer des propriétés des groupes est disponible à l'adresse `http://groupexplorer.sourceforge.net`.

[6] C.A. Daul, *Applications de la théorie des groupes à la chimie*, disponible sur le web, pour voir en quoi la théorie des groupes intervient en chimie.

[7] J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker et R. A. Wilson, *Atlas of finite groups*, Clarendon Press Oxford, 1985. (QA171A86)
C'est la compilation des résultats de la classification des groupes finis.

[8] F.M. Goodman, *Algebra : Abstract and Concrete*, Disponible sur le web. En anglais, mais très bien présenté avec un point de vue original soulignant le rôle des symétries en mathématiques.

[9] A. Kostrikin, *Introduction à l'algèbre*, Éditions MIR, 1986. (QA154.2K6714)

[10] S. Lang, *Structures algébriques*, InterEditions, 1976. (QA251L2514)

[11] F. Liret et D. Martinais, *Algèbre* 1re *année*, 2e édition, Dunod, 2003. (QA155L47.2003)

[12] J.S. Milne, *Group Theory*, 135 pages. Disponible sur le web. Un bon livre en anglais, qui porte sur la matière de cours, mais qui va plus loin sur certains sujets. Aussi avec une bonne bibliographie classique, citant les meilleures sources. Son site personnel contient aussi d'autres notes de cours sur une vaste gamme de sujets.

[13] G. Polya, *Comment poser et résoudre un problème*. Dunod, 1962. (QA11P614)
Un classique pour apprendre à réfléchir aux mathématiques, ou au moins à y penser autrement.

[14] S. Sternberg, *Group Theory and Physics*, Cambridge University Press, 1995.
Un très bon livre pour aller plus loin. C'est du niveau des études avancées.

Alphabet grec

A,	α :	alpha	N,	ν :	nu
B,	β :	bêta	Ξ,	ξ :	xi
Γ,	γ :	gamma	O,	o :	omicron
Δ,	δ :	delta	Π,	π :	pi
E,	ε :	epsilon	P,	ρ :	rhô
Z,	ζ :	dzéta	Σ,	σ, ς :	sigma
H,	η :	êta	T,	τ :	tau
Θ,	θ :	thêta	Υ,	υ :	upsilon
I,	ι :	iota	Φ,	φ :	phi
K,	κ :	êta	X,	χ :	khi
Λ,	λ :	lambda	Ψ,	ψ :	psi
M,	μ :	mu	Ω,	ω :	omega

Index