

Feuille d'exercices 1 : Rappel sur les groupes symétriques

Exercice 1.

- a. Donner un exemple d'un homomorphisme non-trivial de \mathbb{Z} dans S_3 .
- b. Est-il possible de construire un homomorphisme surjectif de \mathbb{Z} dans S_3 ?

Exercice 2. Soit α et β les deux permutations suivantes.

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- a. Calculer les sous-groupes $\langle \alpha \rangle$, $\langle \beta \rangle$, et $\langle \alpha, \beta \rangle$ de S_4 .
- b. Montrer que $\langle \alpha, \beta \rangle$ et $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$ sont isomorphes.
- c. Déterminer tous les homomorphismes de $\langle \alpha, \beta \rangle$ dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Pour chaque homomorphisme, déterminer son noyau et son image.

Exercice 3. Soit $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_{l-1}, a_l)$ un cycle dans S_n . La *longueur* de α est l . Le support de α est l'ensemble $\{a_1, a_2, \dots, a_{l-1}, a_l\}$. On dit que deux cycles sont à *disjoint* si leurs supports sont disjoint.

- a. Montrer que $\alpha^{-1} = (a_l, a_{l-1}, \dots, a_2, a_1)$.
- b. Montrer que l'ordre de α est l . Montrer que l'ordre de α^{-1} est l .
- c. Montrer que si α est un cycle de longueur impair, alors α^2 est aussi un cycle.
- d. Montrer que $\alpha\beta = \beta\alpha$ si α et β sont des cycles à supports disjoints.
- e. Soit σ une permutation quelconque dans S_n . Montrer que

$$\sigma\alpha\sigma^{-1} = (\sigma(a_1), \sigma(a_2), \dots, \sigma(a_l)).$$

- f. Soit $\sigma \in S_n$. Montrer que σ se décompose de manière unique en produit de cycles disjoints (à l'ordre des facteurs près). Par exemple, pour la permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 5 & 7 & 6 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

on a

$$\sigma = (1, 3, 5, 6)(2, 4, 7, 8).$$

- g. Le *type cyclique* d'une permutation σ est le **partage de n** donnée par les longueurs des cycles dans la décomposition de σ en produit de cycles disjoints. Montrer que deux permutations sont conjugués ssi ils ont le même type cyclique.
- h. Montrer que σ et son inverse σ^{-1} sont conjugués.
- i. Soit σ une permutation dans S_n , où $n \geq 3$. Montrer que si $\sigma\omega = \omega\sigma$ pour tout $\omega \in S_n$, alors σ est l'élément neutre de S_n .

Exercice 4. Montrer que toute permutation de S_n se décompose en produit des permutations suivantes :

- a. $(1, 2), (1, 3), (1, 4), \dots, (1, n)$. (Indice : $(a_1, a_2, \dots, a_p) = (a_1, a_p)(a_1, a_{p-1}) \cdots (a_1, a_2)$.)
- b. $(1, 2), (2, 3), (3, 4), \dots, (n-1, n)$. (Indice : $(3, 4) = (1, 3)(1, 4)(1, 3)^{-1}$.)
- c. $(1, 2), (1, 2, 3), \dots, (1, 2, \dots, n)$.
- d. $(1, 2), (2, 3), \dots, (n-1, n)$.

(Autrement dit, les ensembles ci-dessus sont des parties génératrices de S_n .)

Exercice 5. Soit $n \geq 2$. On appelle *signature* d'une permutation $\omega \in S_n$ le nombre

$$\text{sign}(\omega) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\omega(i) - \omega(j)}{i - j},$$

où le produit porte sur tous les couples (i, j) tels que $i < j$. Par exemple, pour $\omega = (\frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{3}{1})$,

$$\begin{aligned} \text{sign} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} &= \left(\frac{\omega(1) - \omega(2)}{1 - 2} \right) \times \left(\frac{\omega(1) - \omega(3)}{1 - 3} \right) \times \left(\frac{\omega(2) - \omega(3)}{2 - 3} \right) \\ &= \left(\frac{2 - 3}{1 - 2} \right) \times \left(\frac{2 - 1}{1 - 3} \right) \times \left(\frac{3 - 1}{2 - 3} \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

- a. Une *inversion* de $\omega \in S_n$ est un couple (i, j) tel que $1 \leq i < j \leq n$ et $\omega(i) > \omega(j)$. Soit $\text{inv}(\omega)$ l'ensemble d'inversions de ω . Montrer que $\text{sign}(\omega) = (-1)^{|\text{inv}(\omega)|}$.
- b. Calculer la signature de tous les éléments de S_3 .
- c. Montrer que toute transposition de S_n est de signature -1 .
- d. Montrer que sign est un homomorphisme de S_n dans le groupe multiplicatif $\{1, -1\}$. (Indice : on peut le faire directement ou à l'aide d'une présentation de S_n .)
- e. Une *permutation paire* est une permutation qui peut être exprimée comme le produit d'un nombre pair de transpositions ; une *permutation impaire* est une permutation qui peut être exprimée comme le produit d'un nombre impair de transpositions. Montrer que $\text{sign}(\sigma) = 1$ si σ est paire ; et $\text{sign}(\sigma) = -1$ si σ est impaire.
- f. L'ensemble des permutations paires dans S_n forme le *groupe alterné* A_n . Montrer que A_n est un sous-groupe normal de S_n .
- g. Montrer que $|A_n| = \frac{n!}{2}$.
- h. Montrer que A_n est engendré par tous les cycles de longueur 3 (tout d'abord, remarquer qu'il suffit de montrer que le produit de deux transpositions est un produit de cycles de longueurs 3 ; ensuite, montrer que $(a, b)(a, b) = id$; $(a, b)(b, c) = (a, b, c)$; et $(a, b)(c, d) = (a, b, c)(b, c, d)$).
- i. Montrer que A_4 est engendré par les cycles $(1, 2, 3)$ et $(2, 3, 4)$. Calculer le graphe de Cayley de A_4 pour la partie génératrice $\{(1, 2, 3), (2, 3, 4)\}$.