Feuille d'exercices 2 : Groupes par générateurs et relations et l'algorithme de Todd et Coxeter

Exercice 1. Soit G et G' les groupes définis par les présentations suivantes :

$$G = \left\langle x, y \;\middle|\; x^2, y^3, xyxyxy \right\rangle \qquad \text{et} \qquad G' = \left\langle a, b \;\middle|\; a^3, b^3, abab \right\rangle$$

a. Utiliser l'algorithme de Todd et Coxeter pour montrer que $G \cong A_4$.

b. Utiliser l'algorithme de Todd et Coxeter pour montrer que $G' \cong A_4$.

c. Donner un isomorphisme explicite entre les groupes.

Exercice 2. Soit $G = \langle a, b, c \mid a^3, b^3, c^4, acac^{-1}, aba^{-1}bc^{-1}b^{-1} \rangle$. Montrer que G est trivial.
(*Indice: Considérer* $(aba^{-1})^3 = (bcb^{-1})^3$.)

Exercice 3. Soit $G = \langle x, y \mid x^3, y^3, x^{-1}y^{-1}xy \rangle$ et $H = \langle x \rangle$. Calculer $[G : H]$.

Exercice 4. Soit $G = \langle x, y \mid x^2y^2, x^3y^5 \rangle$ et $H = \langle 1 \rangle$. Calculer $[G : H]$.

Exercice 5. Calculer l'ordre du groupe défini par la présentation $\langle a, b \mid a^5, b^3, a^2ba^{-1}b^{-1} \rangle$.

Exercice 6.

a. Soit $G = \langle x, y \mid x^2y^2, y^{-1}xyx^{-3} \rangle$. Montrer que G est un groupe d'ordre 8.

b. Soit $G' = \langle a, b \mid a^4, b^2, abab^{-1} \rangle$. Montrer que G' est un groupe d'ordre 8.

c. Déterminer si G et G' sont isomorphes.

Exercice 7 ! Soit G un groupe d'ordre 12 qui ne possède pas de sous-groupe d'ordre 6. Montrer que G est isomorphe au groupe alterné A_4. *(En particulier, ceci entraîne que A_4 ne possède pas un sous-groupe d'order 6.)*

Exercice 8 ! Soit $G = \langle s, t \mid t^{-1}s^3t = s^5 \rangle$. Montrer que l'élément

$$s^{-1}t^{-1}s^{-1}tst^{-1}st$$

appartient à $\ker(f)$ pour tout morphisme de groupes $f : G \to G'$ dont G' est un groupe fini.

Exercice 9 !

a. Montrer que $(\mathbb{Q}, +)$ est engendré par $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}, n \neq 0\right\}$.

b. Montrer que $(\mathbb{Q}, +)$ est engendré par $\left\{\frac{1}{n!} : n \in \mathbb{N}, n \neq 0\right\}$.

c. Montrer que $(\mathbb{Q}, +)$ n'admet pas une présentation finie.

Exercice 10 ! *(Présentation de $\mathbb{Q}$)* Montrer que $(\mathbb{Q}, +)$ admet pour présentation

$$\left\langle \{s_i : i \in \mathbb{N}, i > 0\} \;\middle|\; \left\{s_i^i = s_{i-1} : i \in \mathbb{N}, i > 1\right\} \right\rangle.$$