Feuille d'exercices 3 : Représentations irréductibles / Modules simples

Représentations

Exercice 1. Soit D_4 le groupe des isométries du carré à sommets $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$ et $(1,-1)$ dans $\mathbb{R}^2$.

a. Choisir une base de $\mathbb{R}^2$ et exprimer les isométries dans cette base.

b. Déterminer si cette représentation matricielle de D_4 est irréductible.

Exercice 2. *(Restriction d'une représentation à une sous-groupe)* Soit $\xi : S_3 \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ la représentation standard de S_3, et H le sous-groupe de S_3 engendré par le cycle $(1,2,3)$.

a. Montrer que la restriction $\xi|_H : H \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ est une représentation de H.

b. Montrer que cette représentation n'est pas irréductible.

Exercice 3. Soit $\rho : G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ une représentation matricielle de G de dimension n. Montrer que l'application $g \mapsto \det(\rho(g))$ est une représentation de G de dimension 1.

Exercice 4. Soit $\varphi : H \to G$ un morphisme de groupes et $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation.

a. Montrer que la composition $\rho \circ \varphi$ est une représentation de H.

b. Montrer que si ρ est irréductible et φ est surjectif, alors $\rho \circ \varphi$ est irréductible.

Exercice 5. Soit G le groupe avec présentation

$$G = \left\langle a, b \mid a^4 = b^2 = 1,\ b^{-1}ab = a^{-1} \right\rangle.$$

a. Montrer que

$$\rho(a) = \begin{pmatrix} -7 & 10 \\ -5 & 7 \end{pmatrix} \qquad \rho(b) = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

se prolonge en une représentation de G.

b. Déterminer si ρ est une représentation irréductible de G.

Exercice 6. Soit $\rho : G \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ une représentation d'un groupe fini G. Montrer que s'il existe $g, h \in G$ tels que $\rho(g)\rho(h) \neq \rho(h)\rho(g)$, alors ρ est irréductible.

Exercice 7. Le groupe symétrique S_4 est engendré par les permutations $\sigma = 2134$, $\tau = 2341$.

a. Montrer que

$$\rho(\sigma) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \rho(\tau) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

se prolonge en une représentation matricielle de S_4.

b. Montrer que ρ est une représentation irréductible de S_4.

Exercice 8. Soit $\rho : G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ une représentation matricielle d'un groupe fini G. On définit l'application $\rho^* : G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ par $\rho^*(g) = \rho(g^{-1})^\top$, où $M^\top$ désigne la transposée d'une matrice M. Montrer que ρ^* est une représentation matricielle de G de dimension n.

Sous-modules et simplicité

Exercice 9. Soit U et W deux sous-modules d'un G-module V.

a. Montrer que $U \cap W$ est un sous-module de V.

b. Montrer que $U + W = \{u + w : u \in U, w \in W\}$ est un sous-module de V.

c. Montrer que $V = U \oplus W$ ssi $V = U + W$ et $U \cap W = \{0\}$.

Exercice 10. Soit V un G-module. L'ensemble des *invariants (ou G-invariants)* de V est

$$V^G = \{v \in V : gv = v \text{ pour tout } g \in G\}.$$

Montrer que V^G est un sous-module de V.

Exercice 11. Soit U et W deux sous-modules d'un G-module V.

a. Montrer que si U est simple, alors $U \cap W = \{0\}$ ou $U \cap W = U$.

b. Montrer que si U et W sont simple, alors $U \cap W = \{0\}$ ou $U = W$.

Exercice 12. Montrer qu'un G-module V est simple ssi pour tout $v \in V$ non nul, on a que V est engendré (comme espace vectoriel) par les éléments $\{gv : g \in G\}$.

Exercice 13. Soit V un G-module de dimension 2. Montrer que s'il existe $g, h \in G$ et $v \in V$ tels que $ghv \neq hgv$, alors V est simple.

Exercice 14. Soit G un groupe.

> *Le* module régulier *de G sur $\mathbb{C}$, noté $\mathbb{C}G$, est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = \{v_g : g \in G\}$ dont les éléments sont indexés par les éléments de G, et dont*
>
> $$h \cdot v_g = v_{h \cdot g}, \qquad (h, g \in G)$$
>
> *où $h \cdot g$ dénote le produit de h et g dans G.*

a. Soit $\varphi : G \to \mathbb{C}^\times$ un morphisme de groupe. Montrer que le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}G$ engendré par l'élément $\sum_{g \in G} \varphi(g) v_g$ est un sous-module de $\mathbb{C}G$ de dimension 1.

b. En déduire que $\mathbb{C}G$ est un G-module simple ssi G est le groupe trivial.

c. En déduire que $\mathbb{C}S_n$ possède au moins deux sous-modules simples de dimension 1.

Exercice 15. Soit G un groupe fini et V un G-module sur $\mathbb{C}$ de dimension 3. Montrer que V est simple ssi il n'existe pas un vecteur $v \in V$ tel que $gv \in \mathbb{C}v$ pour tout $g \in G$.