

Feuille d'exercices 4 : Compléments sur le Théorème de Maschke

Exercice 1. (*Contre-exemple au Théorème de Maschke dont le groupe est infini.*) Soit \mathbb{R}^+ l'ensemble des nombres réels strictement positifs muni du produit usuel. Définir une fonction $\rho : \mathbb{R}^+ \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{C})$ par

$$\rho(r) = \begin{pmatrix} 1 & \log(r) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pour tout $r \in \mathbb{R}^+$.

- Montrer que ρ est une représentation matricielle de \mathbb{R}^+ .
- Soit W le sous-espace de \mathbb{C}^2 défini comme $W = \left\{ \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} : c \in \mathbb{C} \right\}$. Montrer que W est stable relativement à la représentation ρ ; c'est-à-dire, montrer que $\rho(r)w \in W$ pour tout $r \in \mathbb{R}^+$ et tout $w \in W$.
- Montrer qu'il n'existe pas de sous-espace $U \subset \mathbb{C}^2$ stable relativement à l'action de ρ tel que $\mathbb{C}^2 \cong W \oplus U$. (Suggestion : exprimer $\rho(r)$ dans une base différente.)

Exercice 2. (*Contre-exemple au Théorème de Maschke dont la caractéristique du corps divise l'ordre du groupe.*) Soit p un nombre premier, $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $C_p = \{1, g, g^2, \dots, g^{p-1}\}$ le groupe cyclique à p éléments. Soit $\varphi : C_p \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ l'application définie par

$$\varphi(g^j) = \begin{pmatrix} 1 & j \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pour tout $j \in \{0, 1, \dots, p-1\}$.

- Montrer que $V = \mathbb{F}_p^2$ est un C_p -module de dimension 2.
- Montrer que le sous-espace U de V engendré par e_1 est un sous-module de V .
- Montrer qu'il n'existe pas de sous-module W de V tel que $V = U \oplus W$.

Exercice 3. Soit V un \mathbb{C} -espace vectoriel. Un *produit scalaire* sur V est une application

$$\begin{aligned} V \times V &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (u, v) &\longmapsto \langle u, v \rangle \end{aligned}$$

telle que

- $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$, où \bar{z} dénote le conjugué complexe d'un nombre complexe z ;
- $\langle \alpha u + \alpha' u', v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle + \alpha' \langle u', v \rangle$ pour $\alpha, \alpha' \in \mathbb{C}$ et $u, u', v \in V$;
- $\langle u, u \rangle > 0$ si $u \neq 0$.

Étant donné une représentation $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$, on définit une application $V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ par

$$(u, v) = \sum_{g \in G} \langle \rho(g)u, \rho(g)v \rangle.$$

- Vérifier que cette application est un produit scalaire complexe sur V .
- Montrer que $(u, v) = (\rho(g)u, \rho(g)v)$ pour tout $g \in G$ et tous $u, v \in V$.
- Montrer qu'il existe une base de V dans laquelle les matrices $X(g)$ associées aux éléments g de G vérifient $X(g^{-1}) = \overline{X(g)}^t$.
- Montrer que $W^\perp = \{v \in V : (v, w) = 0 \text{ pour tout } w \in W\}$ est un sous-module de V pour tout sous-module W de V .
- En déduire la version suivante du Théorème de Maschke : si W est un sous-module de V , alors il existe un sous-module U de V tel que $V = W \oplus U$.