Feuille d'exercices 5

Produit scalaire de caractères

Exercice 1. Soit $Y : S_3 \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ la représentation matricielle suivante.

$$Y([123]) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad Y([132]) = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$
$$Y([231]) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad Y([213]) = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$
$$Y([312]) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad Y([321]) = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

a. Calculer le caractère de Y.

b. À l'aide du produit scalaire des caractères, déterminer si Y est irréductible.

c. Si Y n'est pas irréductible, décomposer Y en représentations irréductibles.

Exercice 2. Le groupe symétrique S_4 est engendré par les permutations

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit X la représentation matricielle de S_4 définie par les matrices

$$X(\sigma) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad X(\tau) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

a. Calculer le caractère χ de X.

b. À l'aide du produit scalaire des caractères, montrer que X est irréductible.

c. Soit H le sous-groupe de S_4 engendré par le cycle $(1, 2, 3, 4)$. Calculer le caractère ψ de la restriction de X à H.

d. À l'aide du produit scalaire des caractères, décomposer ψ en caractères irréductibles.

Exercice 3. Rappeler que le produit scalaire de fonctions α et β de G vers $\mathbb{C}$ est défini par

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \alpha(g)\overline{\beta(g)}.$$

Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un *produit scalaire complexe* sur l'espace vectoriel complexe des fonctions de G vers $\mathbb{C}$. Explicitement, montrer que :

a. $\langle \alpha, \beta \rangle = \overline{\langle \beta, \alpha \rangle}$, où $\overline{z}$ dénote le conjugué complexe d'un nombre complexe z ;

b. $\langle z\alpha + z'\alpha', \beta \rangle = z\langle \alpha, \beta \rangle + z'\langle \alpha', \beta \rangle$ pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$ et $\alpha, \alpha', \beta : G \to \mathbb{C}$;

c. $\langle \alpha, \alpha \rangle > 0$ si $\alpha \neq 0$.

Tables de caractères

Exercice 4. Soit G le sous-groupe du groupe symétrique S_7 engendré par les permutations suivantes.

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

a. Vérifier que $a^7 = \epsilon$, $b^3 = \epsilon$, $b^{-1}aba^{-2} = \epsilon$, où ϵ est la permutation identité.

b. Montrer que G est d'ordre 21.

c. Calculer les classes de conjugaison de G.

d. Calculer la table de caractères de G.

Exercice 5. Le *groupe des quaternions*, noté Q, est le groupe d'ordre 8 avec éléments

$$Q = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$$

et relations :

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \qquad \text{et} \qquad (-1)^2 = 1.$$

a. Montrer que

$$\rho(-1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \rho(i) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad \rho(j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \rho(k) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

se prolonge en une représentation sur $\mathbb{C}$ de Q.

b. Calculer le caractère de la représentation ρ.

c. Montrer que la représentation ρ est irréductible.

d. Montrer que le sous-groupe dérivé de Q est $Q' = \{1, -1\}$.

e. Montrer que $Q/Q' \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

f. En déduire qu'il y a exactement 4 autres représentations irréductibles de Q, et qu'elles sont toutes de dimension 1.

g. Calculer la table de caractères de Q. (*Indice: utiliser les caractères de* Q/Q')

Exercice 6. Soit D_4 le groupe diédral (isométries du carré).

a. Écriver les éléments de D_4 comme des permutations des sommets du carré.

b. Choisir une base du plan et exprimer les isométries dans la base.

c. Calculer le caractère de cette représentation matricielle.

d. Montrer que cette représentation matricielle est irréductible.

e. Calculer le sous-groupe dérivé de D_4. En déduire que $D_4/D_4' \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

f. En déduire qu'il y a exactement 4 autres représentations irréductible de D_4, et qu'elles sont toutes de dimension 1.

g. Calculer la table de caractères de D_4 (*Indice: utiliser les caractères de* D_4/D_4')

Exercice 7. Comparer les tables de caractères de Q et D_4. Réfléchir sur la signification.

Sous-groupe dérivé

Exercice 8. Soit G' le sous-groupe dérivé de G et $Ab(G) = G/G'$.

a. Si $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ est une représentation complexe de G de dimension 1, alors l'application $\bar{\rho}$ défini par $\bar{\rho}(gG') = \rho(g)$ est une représentation irréductible de $Ab(G)$.

b. Si $\varphi : Ab(G) \to \mathrm{GL}(V)$ est une représentation complexe irréductible de $Ab(G)$, alors l'application $\tilde{\varphi}(g) = \varphi(gG')$ est une représentation complexe de G de dimension 1.

c. En déduire qu'il y a une bijection entre les représentations complexes de dimension 1 de G est les représentations complexes irréductibles de $Ab(G)$.

d. Sachant que le sous-groupe dérivé de S_n est le group alterné A_n, en déduire qu'il y a exactement deux représentation de dimension 1 de S_n si $n \geq 2$.

Exercice 9. Soit G un groupe fini et G' son sous-group dérivé. Montrer que G' est égale à l'intersection des noyaux de caractères linéaires :

$$G' = \bigcap_{\chi \text{ caractère linéaire}} \ker(\chi) = \{g \in G : \chi(g) = \chi(e) = 1\}$$

(*Rappel:* $\ker(\chi) = \{g \in G : \chi(g) = \chi(e)\}$)

Exercice 10. Soit ρ une représentation matricielle complexe d'un groupe fini G.

a. Montrer que l'application $\delta(g) = \det(\rho(g))$ est un caractère linéaire de G.

b. Montrer que $G/\ker(\delta)$ est abélien.

c. Montrer que si G possède un élément g tel que $\delta(g) = -1$,
alors G possède un sous-groupe normal d'indice 2.

Relations d'orthogonalité

Exercice 11. Soit $\chi_{rég}$ le caractère de la représentation régulière d'un groupe fini G. Montrer que pour tout caractère ψ de G, on a $\langle \chi_{rég}, \psi \rangle = \psi(e)$.

Exercice 12. Soit χ un caractère irréductible non-trivial de S_n.

a. Montrer que $\sum_{\sigma \in S_n} \chi(\sigma) = 0$.

b. Montrer que $\sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma)\chi(\sigma) = 0$.

Exercice 13. Soit G un groupe fini. Montrer qu'un élément $g \in G$ et son inverse g^{-1} sont conjugués dans G ssi tout caractère de G prend sur g une valeur réelle.

(*Indice: deuxième relation d'orthogonalité*)

Exercice 14. Soit G un groupe fini, $Z(G)$ le centre de G, et $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_k$ les caractères irréductibles de G.

a. Montrer que

$$Z(G) = \left\{ g \in G : \sum_{i=1}^{k} \chi_i(g)\chi_i(g^{-1}) = |G| \right\}.$$

b. Montrer que

$$Z(G) = \bigcap_{i=1}^{k} \{ g \in G : |\chi_i(g)| = \chi_i(e) \}.$$

c. Montrer que si χ est un caractère irréductible de G tel que $\ker(\chi) = \{e\}$, alors

$$Z(G) = \{ g \in G : |\chi(g)| = \chi(e) \}.$$

Défis

Exercice 15. Soit G un groupe fini et H un sous-groupe de G. Si ψ est un caractère irréductible de H, alors il existe un caractère irréductible χ de G tel que

$$\langle \chi|_H, \psi \rangle_H \neq 0.$$

Ici,

- $\chi|_H$ est la restriction de la fonction $\chi : G \to \mathbb{C}$ à H ; et
- $\langle \chi|_H, \psi \rangle_H$ est le produit scalaire défini sur l'ensemble de fonctions sur H ; c'est-à-dire,

$$\langle \tau, \psi \rangle_H = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \tau(h)\overline{\psi(h)}$$

(*Indice: Calculer le produit scalaire du caractère régulier de G et ψ de deux façons différentes.*)

Exercice 16. Soit χ un caractère d'un groupe fini G et g un élément d'ordre 2 de G.

a. Montrer que $\chi(g)$ est un entier.

b. Montrer que $\chi(g) \equiv \chi(e) \mod 2$, où e est l'élément neutre de G.

c. Montrer que $\chi(g) \equiv \chi(e) \mod 4$ ou G possède un sous-groupe normal d'indice 2.

Exercice 17 ! Soit G un groupe fini dont le centre de tout sous-groupe de Sylow de G est cyclique. Montrer que G possède un caractère irréductible χ vérifiant $\ker(\chi) = \{e\}$.