Feuille d'exercices 6

Exercice 1. Soit S_n le groupe symétrique sur n éléments.

a. Si $\sigma \in S_n$ est écrit comme produit de cycles $\sigma = (a, b, c, \dots)(i, j, k, \dots) \cdots (u, v, w, \dots)$, montrer que pour $\alpha \in S_n$ on a

$$\alpha\sigma\alpha^{-1} = \Big(\alpha(a), \alpha(b), \alpha(c), \dots\Big)\Big(\alpha(i), \alpha(j), \alpha(k), \dots\Big) \dots \Big(\alpha(u), \alpha(v), \alpha(w), \dots\Big).$$

b. Montrer que deux permutations dans S_n sont conjuguées ssi elles ont même type cyclique (c'est-à-dire, même nombre de cycles de chaque longueur).

c. En déduire que le nombre de représentations irréductibles de S_n est égal au nombre de partages de n. (Rappel : une *partage* d'un entier n est une suite finie $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ d'entiers strictement positifs telle que $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = n$.)

Exercice 2. Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X. Montrer que la fonction $\chi : G \to \mathbb{C}$ définie par

$$\chi(g) = \Big|\{x \in X : g \cdot x = x\}\Big| - 1,$$

pour tout élément $g \in G$, est un caractère de G. Est-il un caractère irréductible ?

Exercice 3. Calculer la table de caractère de A_4.

Remarques :

- *Il y a 4 irréductibles : les 3-cycles ne forment pas une seule classe de conjugaison.*
- *On peut se servir de la table de caractère de S_4.*

	ε	$(1\,2)$	$(1\,2)(3\,4)$	$(1\,2\,3)$	$(1\,2\,3\,4)$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	1	-1
χ_3	2	0	2	-1	0
χ_4	3	-1	-1	0	1
χ_5	3	1	-1	0	-1

Figure 1 – Table de caractères de S_4.

Exercice 4. On considère l'action d'un groupe fini G sur lui-même par conjugaison : plus précisément, soit V un espace vectoriel avec base $\{v_h : h \in G\}$ et $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ défini par

$$\rho(g)(v_h) = v_{ghg^{-1}} \qquad \text{pour tout } g, h \in G.$$

Notons le caractère de ρ par ψ.

a. Pour $h \in G$, posons V_h le sous-espace vectoriel de V engendré par $\{ghg^{-1} : g \in G\}$. Montrer que V_h est un sous-module de V et déterminer $\dim(V_h)$.

b. Pour $g \in G$, montrer que $\psi(g)$ est la cardinalité du centralisateur de g.

c. Montrer que $\psi = \sum_\chi \chi\overline{\chi}$, où la somme est sur tous les caractères irréductibles de G.

d. Montrer que $\langle \psi, \chi \rangle = \sum_{\mathcal{C}} \chi(\mathcal{C})$, où la somme est sur toutes les classes de conjugaison de G, et $\chi(\mathcal{C})$ indique la valeur $\chi(g)$ pour n'importe quel élément $g \in \mathcal{C}$.

e. Soit χ un caractère irréductible de G. En déduire que la somme des valeurs dans la ligne de la table de caractères de G correspondant à χ est un nombre naturel.