Feuille d'exercices 7

Matrice de Vandermonde

Exercice 1. Soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des nombres complexes. Notons par $V(x_1, \ldots, x_n)$ la matrice de Vandermonde associée à $x_1, \ldots, x_n$:

$$V(x_1, \ldots, x_n) = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}.$$

a. Montrer que $\det(V(x_1, \ldots, x_n)) = \prod_{1 \leq i < j \leq n}(x_j - x_i)$.

b. En déduire que $\det(V(x_1, \ldots, x_n))$ est non nul ssi $x_1, \ldots, x_n$ sont distincts.

Exercice 2. Soit $z_1, z_2, \ldots, z_n$ des nombres complexes.

a. Montrer que

$$\det \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & \cdots & z_n \\ z_1^2 & z_2^2 & \cdots & z_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^n & z_2^n & \cdots & z_n^n \end{bmatrix} = z_1 z_2 \ldots z_n \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{n-1} & z_2^{n-1} & \cdots & z_n^{n-1} \end{bmatrix}.$$

En déduire que le déterminant est non nul ssi $z_1, \ldots, z_n$ sont non nuls est distincts.

b. Montrer que si $z_1^k + z_2^k + \cdots + z_n^k = 0$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, alors $z_1 = \cdots = z_n = 0$.

Exercice 3. Soit un polynôme unitaire de degré n qui possède n racines distinctes

$$p(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0 = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_n).$$

Montrer que

$$V(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -c_{n-1} \end{bmatrix} V(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

où $V(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ est la matrice de Vandermonde associée à $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Produit tensoriel

Exercice 4. Soit G un groupe fini, et V et W des G-modules sur $\mathbb{C}$ tels que $\dim(W) = 1$. Montrer que $V \otimes W$ est un G–module simple ssi V est un G–module simple.

Exercice 5. Soit G un groupe fini, V un G–module et $g \in G$. Soit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d$ les valeurs propres de g sur V. Calculer les valeurs propres de g sur $S(V \otimes V)$ et $A(V \otimes V)$.

Exercice 6. Soit V_{triv}, V_{signe} et V_{std} les S_4–modules trivial, signe et standard, respectivement.

a. Calculer les caractères et les dimensions des S_4–modules suivants : (i) $S(V_{\text{triv}} \otimes V_{\text{triv}})$ (ii) $A(V_{\text{signe}} \otimes V_{\text{signe}})$ (iii) $A(V_{\text{std}} \otimes V_{\text{std}})$ (iv) $S((V_{\text{triv}} \oplus V_{\text{signe}}) \otimes (V_{\text{triv}} \oplus V_{\text{signe}}))$.

b. Déterminer si les S_4–modules ci-dessus sont simples.

Exercice 7. Soit G et H deux groupes finis. Pour $\alpha : G \to \mathbb{C}$ et $\beta : H \to \mathbb{C}$, on note par $\alpha \times \beta$ la fonction de $G \times H$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$(\alpha \times \beta)(g, h) = \alpha(g)\beta(h) \text{ pour tout } (g, h) \in G \times H.$$

a. Montrer que deux éléments (g, h) et (g', h') de $G \times H$ sont conjugués ssi g et g' sont conjugués dans G et h et h' sont conjugués dans H.

b. Montrer que si α est une fonction centrale de G et β est une fonction centrale de H, alors $\alpha \times \beta$ est une fonction centrale de $G \times H$.

c. Montrer que si χ est un caractère de G est ψ est un caractère de H, alors $\chi \times \psi$ est un caractère de $G \times H$. (*Indice: considérer le produit tensoriel des modules associés*)

d. Montrer que si $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_s$ sont tous les caractères irréductibles distincts de G, et $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_t$ sont tous les caractères irréductibles distincts de H, alors $\chi_i \times \psi_j$ sont tous les caractères irréductibles distincts de $G \times H$.

e. Déterminer la table de caractères de $S_3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Indicateur de Frobenius–Schur

Exercice 8. Soit χ un caractère linéaire et $\iota(\chi)$ son indicateur de Frobenius–Schur. Montrer que

$$\iota(\chi) = \begin{cases} 1, & \chi = \overline{\chi}, \\ 0, & \chi \neq \overline{\chi}. \end{cases}$$

Exercice 9. Déterminer l'indicateur de Frobenius–Schur de chaque caractère irréductible du groupe diédral D_4 (isométries du carré) et du groupe des quaternions Q. Comme les tables de caractères de D_4 et Q coincident, l'indicateur de Frobenius–Schur nous donne une façon de distinguer entre les groupes D_4 et Q.