# Feuille d'exercices 8

## Caractères induits et Réciprocité de Frobenius

**Exercice 1.** Soit $H$ un sous-groupe d'un groupe fini $G$ et $\psi$ un caractère de $H$. Montrer que si $H$ est normal dans $G$, alors $\mathrm{Ind}_H^G(\psi)(g) = 0$ pour tout $g \notin H$.

**Exercice 2.** Soit $N$ un sous-groupe normal d'un groupe fini $G$ et $\chi$ un caractère irréductible de $G$ tel que $\langle \mathrm{Res}_N^G(\chi), \mathbb{1}_N \rangle \neq 0$, où $\mathbb{1}_N$ est le caractère trivial de $N$. Montrer que $N \subseteq \ker(\chi)$.

**Exercice 3.** Soit $H$ un sous-groupe de $G$, $\psi$ un caractère de $H$, et $f$ une fonction centrale sur $G$. Montrer que

$$\left\langle \mathrm{Ind}_H^G(\psi), f \right\rangle_G = \left\langle \psi, \mathrm{Res}_H^G(f) \right\rangle_H .$$

**Exercice 4.** Soit $H$ un sous-groupe de $G$, et $\chi_1, \ldots, \chi_k$ les caractères irréductibles de $G$. Pour tout caractère irréductible $\psi$ de $H$, il existe $d_1, d_2, \ldots, d_k \in \mathbb{N}$ tels que

$$\mathrm{Ind}_H^G(\psi) = d_1\chi_1 + d_2\chi_2 + \cdots + d_k\chi_k.$$

Montrer que

$$d_1^2 + d_2^2 + \cdots + d_k^2 \leq [G : H].$$

**Exercice 5 !** Soit $H$ et $K$ des sous-groupes d'un groupe fini $G$ et $\psi$ est un caractère de $H$.

*a.* Montrer que

$$\mathrm{Ind}_H^G(\psi)(e) = \frac{|G|}{|H|}\psi(e).$$

*b.* Montrer que si $\mathrm{Res}_K^G(\mathrm{Ind}_H^G(\psi))$ est un caractère irréductible de $K$, alors

$$\left\langle \mathrm{Res}_K^G\left(\mathrm{Ind}_H^G(\psi)\right), \mathrm{Ind}_{H\cap K}^K\left(\mathrm{Res}_{H\cap K}^H(\psi)\right)\right\rangle_K \neq 0.$$

*c.* Montrer que si $\mathrm{Res}_K^G(\mathrm{Ind}_H^G(\psi))$ est un caractère irréductible de $K$, alors $G = HK$.

(*Indice: En déduire des parties précédentes que* $|G : H| \leq |K : K \cap H|$.)

**Exercice 6 !** Soit $G$ est un groupe fini dont la première colonne de la table de caractères est $1, 1, 1, 1, 2, 8$. Déterminer la table de caractères de $G$.