Devoir 1

à remettre le 20 février 2013

Soit R un anneau associatif et unitaire.

Exercice 1. Soient $f : M \to N$ un morphisme de R–modules à gauche et K un sous-module de M tel que $K \subseteq \ker(f)$. Montrer que la correspondance

$$\begin{aligned} \widehat{f} : M/K &\longrightarrow N \\ m + K &\longmapsto f(m) \end{aligned}$$

est un morphisme de R–modules. *(Il faut montrer en particulier que $\widehat{f}$ est bien défini.)*

Exercice 2. Soit I l'idéal de $\mathbb{Z}[x]$ engendré par 2 et x. Remarquer qu'on a $\mathbb{Z}[x]/I \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. *Le but de cet exercice est de montrer que $2 \otimes x \neq x \otimes 2$ dans $I \otimes_{\mathbb{Z}[x]} I$.*

a. Montrer que l'application $\beta : I \times I \longrightarrow \mathbb{Z}[x]/I$ définie par

$$\beta\left(p(x), q(x)\right) = \frac{p(0)}{2}\, q'(0)$$

est $\mathbb{Z}[x]$–bilinéaire, où q' est la dérivée du polynôme q.

b. En déduire qu'il existe un $\mathbb{Z}[x]$-morphisme $I \otimes_{\mathbb{Z}[x]} I \longrightarrow \mathbb{Z}[x]/I$ donné par

$$p(x) \otimes q(x) \longmapsto \frac{p(0)}{2}\, q'(0).$$

c. En déduire que $2 \otimes x \neq x \otimes 2$.

Exercice 3. Soit R un *anneau intègre*. Pour un R–module M, on définit

$$\mathrm{Tor}(M) = \{m \in M \ : \text{ il existe } r \in R \ \underline{\text{non-nul}} \text{ tel que } r \cdot m = 0\}.$$

Alors, $\mathrm{Tor}(M)$ est un sous-module de M.

a. Soit Q le corps des fractions de R. Montrer qu'il existe un isomorphisme de R–modules

$$Q \otimes_R M \cong Q \otimes_R (M/\,\mathrm{Tor}(M)).$$

(Utiliser les techniques vues dans le cours pour construire le R–morphisme $q \otimes m \longmapsto q \otimes (m + \mathrm{Tor}(M))$ et sa réciproque $q \otimes (m + \mathrm{Tor}(M)) \longmapsto q \otimes m$.)

b. Soient I et J deux idéaux de R et $\mu : I \otimes_R J \to IJ$ le R–morphisme définit sur les tenseurs élémentaires par $\mu(a \otimes b) = ab$. Montrer que

$$\mathrm{Tor}(I \otimes_R J) = \ker\left(I \otimes_R J \xrightarrow{\mu} IJ\right).$$

Pf. If $t \in \mathrm{Tor}(I \otimes_R J)$, then $r \cdot t = 0$ for some nonzero r, and so $r\mu(t) = \mu(rt) = 0$. Since R is an integral domain and $r \neq 0$, it follows that $\mu(t) = 0$. Hence, $\mathrm{Tor}(I \otimes_R J) \subseteq \ker(\mu)$. Conversely, suppose that $\sum_\lambda i_\lambda \otimes j_\lambda \in \ker(\mu)$. Then $\sum_\lambda i_\lambda j_\lambda = \mu\left(\sum_\lambda i_\lambda \otimes j_\lambda\right) = 0$, and so, for any nonzero $i \in I$, we have $i\left(\sum_\lambda i_\lambda \otimes j_\lambda\right) = \sum_\lambda i \otimes i_\lambda j_\lambda = i \otimes \left(\sum_\lambda i_\lambda j_\lambda\right) = i \otimes 0 = 0$.