# Devoir 2

à remettre le 3 avril 2013

**Exercice 1.** Soient $\mathscr{C}$ une catégorie et $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$. Montrer que si $A$ et $B$ sont isomorphe, alors il existe un isomorphisme naturel entre les foncteurs $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, -)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, -)$.

**Exercice 2.** Soit $\mathcal{B}$ la catégorie dont les objets sont les ensembles finis, les morphismes sonts les bijections, et la composition de morphismes et la composition d'applications.

*a.* Montrer que l'application **Perm** qui associe à tout ensemble fini $X$, l'ensemble de permutations de $X$, et à toute bijection $X \xrightarrow{f} Y$, l'application

$$\sigma \quad \longmapsto \quad f \circ \sigma \circ f^{-1}$$

est un foncteur $\mathbf{Perm} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbf{Ens}$.

*b.* Montrer que l'application **Liste** qui associe à tout ensemble fini $X$, l'ensemble de listes ordonnées[1] d'éléments de $X$, et à toute bijection $X \xrightarrow{f} Y$, l'application

$$[x_1, x_2, \ldots, x_n] \quad \longmapsto \quad [f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)]$$

est un foncteur $\mathbf{Liste} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbf{Ens}$.

*c.* Montrer que $\mathbf{Perm}(X) \cong \mathbf{Liste}(X)$, pour chaque $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{B})$.

*d.* Montrer qu'il n'existe pas de transformation naturelle entre **Perm** et **Liste**.

**Exercice 3.** Soit $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \xrightarrow{\gamma} D \xrightarrow{\delta} E$ une suite exacte de $R$–modules.

*a.* Montrer que $\alpha$ est surjectif ssi $\gamma$ est injectif.

*b.* Montrer que si $\alpha$ et $\delta$ sont isomorphisme, alors $C = \{0\}$.

*c.* Montrer que la suite

$$0 \longrightarrow \mathrm{coker}(\alpha) \xrightarrow{\varphi} C \xrightarrow{\psi} \ker(\delta) \longrightarrow 0$$

est exacte, où $\varphi(b + \mathrm{im}(\alpha)) = \beta(b)$ et $\psi(c) = \gamma(c)$.

1. Par exemple, $\mathbf{Liste}(\{a, b, c\}) = \{[a, b, c], [a, c, b], [b, a, c], [b, c, a], [c, a, b], [c, b, a]\}$.

**Exercice 4.** Soient $P \xrightarrow{g} N$ et $M \xrightarrow{f} N$ deux morphisme dans ${}_R\mathrm{Mod}$ où $P$ est projectif. Montrer qu'il existe $P \xrightarrow{h} M$ dans ${}_R\mathrm{Mod}$ tel que $f \circ h = g$ ssi $\mathrm{im}(g) \subseteq \mathrm{im}(f)$.

$$\begin{tikzcd}
& P \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "g"] \\
M \arrow[r, "f"] & N
\end{tikzcd}$$

**Exercice 5.** Soient $A \xrightarrow{f} M$ et $B \xrightarrow{g} M$ deux morphismes de $R$–modules à gauche.

*a.* Montrer que

$$X = \{(a, b) : a \in A, b \in B \text{ tels que } f(a) = g(b)\}$$

est un $R$–sous-module de la somme directe $A \oplus B$.

*b.* Montrer que le diagramme suivant est commutatif,

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\pi_B"] \arrow[d, "\pi_A"'] & B \arrow[d, "g"] \\
A \arrow[r, "f"] & M
\end{tikzcd}$$

où $\pi_A(a, b) = a$ et $\pi_B(a, b) = b$.

*c.* Montrer que si

$$0 \to M_1 \to P_1 \xrightarrow{f} M \to 0 \qquad \text{et} \qquad 0 \to M_2 \to P_2 \xrightarrow{g} M \to 0$$

sont deux suites exactes courtes avec $P_1$ et $P_2$ projectifs, alors $M_1 \oplus P_2 \cong M_2 \oplus P_1$.
*Indication : montrer qu'il existe une suite exacte de la forme* $0 \to K \to X \xrightarrow{\pi} P_1 \to 0$.