

Devoir 2

à remettre le 3 avril 2013

Exercice 1. Soient \mathcal{C} une catégorie et $A, B \in \text{Obj}(\mathcal{C})$. Montrer que si A et B sont isomorphe, alors il existe un isomorphisme naturel entre les foncteurs $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -)$ et $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, -)$.

Exercice 2. Soit \mathcal{B} la catégorie dont les objets sont les ensembles finis, les morphismes sont les bijections, et la composition de morphismes et la composition d'applications.

- a. Montrer que l'application **Perm** qui associe à tout ensemble fini X , l'ensemble de permutations de X , et à toute bijection $X \xrightarrow{f} Y$, l'application

$$\sigma \longmapsto f \circ \sigma \circ f^{-1}$$

est un foncteur **Perm** : $\mathcal{B} \longrightarrow \mathbf{Ens}$.

- b. Montrer que l'application **Liste** qui associe à tout ensemble fini X , l'ensemble de listes ordonnées¹ d'éléments de X , et à toute bijection $X \xrightarrow{f} Y$, l'application

$$[x_1, x_2, \dots, x_n] \longmapsto [f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)]$$

est un foncteur **Liste** : $\mathcal{B} \longrightarrow \mathbf{Ens}$.

- c. Montrer que $\mathbf{Perm}(X) \cong \mathbf{Liste}(X)$, pour chaque $X \in \text{Obj}(\mathcal{B})$.
 d. Montrer qu'il n'existe pas de transformation naturelle entre **Perm** et **Liste**.

Exercice 3. Soit $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \xrightarrow{\gamma} D \xrightarrow{\delta} E$ une suite exacte de R -modules.

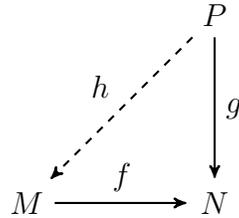
- a. Montrer que α est surjectif ssi γ est injectif.
 b. Montrer que si α et δ sont isomorphisme, alors $C = \{0\}$.
 c. Montrer que la suite

$$0 \rightarrow \text{coker}(\alpha) \xrightarrow{\varphi} C \xrightarrow{\psi} \ker(\delta) \rightarrow 0$$

est exacte, où $\varphi(b + \text{im}(\alpha)) = \beta(b)$ et $\psi(c) = \gamma(c)$.

1. Par exemple, $\mathbf{Liste}(\{a, b, c\}) = \{[a, b, c], [a, c, b], [b, a, c], [b, c, a], [c, a, b], [c, b, a]\}$.

Exercice 4. Soient $P \xrightarrow{g} N$ et $M \xrightarrow{f} N$ deux morphismes dans ${}_R\text{Mod}$ où P est projectif. Montrer qu'il existe $P \xrightarrow{h} M$ dans ${}_R\text{Mod}$ tel que $f \circ h = g$ ssi $\text{im}(g) \subseteq \text{im}(f)$.



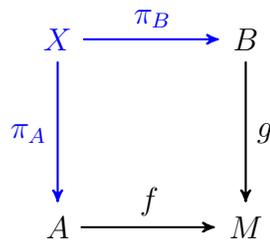
Exercice 5. Soient $A \xrightarrow{f} M$ et $B \xrightarrow{g} M$ deux morphismes de R -modules à gauche.

a. Montrer que

$$X = \{(a, b) : a \in A, b \in B \text{ tels que } f(a) = g(b)\}$$

est un R -sous-module de la somme directe $A \oplus B$.

b. Montrer que le diagramme suivant est commutatif,



où $\pi_A(a, b) = a$ et $\pi_B(a, b) = b$.

c. Montrer que si

$$0 \rightarrow M_1 \rightarrow P_1 \xrightarrow{f} M \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad 0 \rightarrow M_2 \rightarrow P_2 \xrightarrow{g} M \rightarrow 0$$

sont deux suites exactes courtes avec P_1 et P_2 projectifs, alors $M_1 \oplus P_2 \cong M_2 \oplus P_1$.

Indication : montrer qu'il existe une suite exacte de la forme $0 \rightarrow K \rightarrow X \xrightarrow{\pi} P_1 \rightarrow 0$.