Devoir 3

à remettre le 17 avril 2013

Exercice 1. Soient deux suites exactes courtes de R–modules à gauche :

$$0 \to M_1 \xrightarrow{i_1} P_1 \xrightarrow{f} M \to 0 \qquad \text{et} \qquad 0 \to M_2 \xrightarrow{i_2} P_2 \xrightarrow{g} M \to 0$$

Montrer que si P_1 et P_2 sont projectifs, alors $M_1 \oplus P_2 \cong M_2 \oplus P_1$.
(Indication : montrer qu'il existe une suite exacte de la forme $0 \to K \to X \xrightarrow{\pi_i} P_i \to 0$*.)*

Exercice 2. Soit $B' \xrightarrow{i} B$ et $B \xrightarrow{p} B''$ deux morphismes de R–modules à gauche. Si, pour tout R–module à gauche M,

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(B'', M) \xrightarrow{p^*} \mathrm{Hom}_R(B, M) \xrightarrow{i^*} \mathrm{Hom}_R(B', M) \to 0$$

est une suite exacte, montrer que

$$0 \to B' \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} B'' \to 0$$

est une suite exacte *scindée* de R–modules.

Exercice 3. Soit P un R–module à droite.

a. Montrer que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est un R–module à gauche par $r \cdot f : a \mapsto f(a \cdot r)$.

b. Montrer que si P est projectif, alors $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est un R–module à gauche injectif.

Exercice 4. Montrer que P est projectif ssi pour tout épimorphisme $f : I \to J$ avec I injectif et tout morphisme $u : P \to J$ il existe $\Theta : P \to I$ tel que $f \circ \Theta = u$.

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[d, "u"] \arrow[dl, dashed, red, "\Theta"'] & \\
I \arrow[r, "f"'] & J \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Exercice 5. Soit $\mathcal{C}_d$ le groupe cyclique d'ordre d avec générateur t. Alors $\mathbb{Z}$ devient un $\mathbb{Z}\mathcal{C}_d$–module via l'action triviale : $t \cdot n = n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

a. Montrer que l'application $\varepsilon : \mathbb{Z}\mathcal{C}_d \to \mathbb{Z}$ donné par

$$\varepsilon\left(\sum_{i=0}^{d-1} a_i\, t^i\right) = \sum_{i=0}^{d-1} a_i$$

est un morphisme de $\mathbb{Z}\mathcal{C}_d$–modules.

b. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on pose que

$$P_n = \mathbb{Z}\mathcal{C}_d.$$

Pour chaque $n \geq 1$, on définit $d_n : P_n \longrightarrow P_{n-1}$, pour tout $x \in P_n$, par

$$d_n(x) = \begin{cases} x \cdot (t-1), & \text{si } n \text{ est impair,} \\ x \cdot (1 + t + t^2 + \cdots + t^{d-1}), & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

Montrer que d_n est un morphisme de $\mathbb{Z}\mathcal{C}_d$–modules.

c. Montrer que

$$\cdots \to P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \to P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

est une résolution projective de $\mathbb{Z}$ en tant que $\mathbb{Z}\mathcal{C}_d$–module.

d. Calculer $\mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}\mathcal{C}_d}(\mathbb{Z}, A)$ pour tout $n \geq 0$ et tout $\mathbb{Z}\mathcal{C}_d$–module A :

$$\mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}\mathcal{C}_d}(\mathbb{Z}, A) = \begin{cases} A_{\mathcal{C}_d}, & \text{si } n = 0, \\ A^{\mathcal{C}_d} \ / \ \mathrm{im}(\mathcal{N}), & \text{si } n \text{ est impair,} \\ \ker(\mathcal{N}) \ / \ (t-1)A, & \text{si } n \text{ est pair,} \end{cases}$$

où $\mathcal{N} : A \to A$ est donné par $\mathcal{N}(a) = (1 + t + t^2 + \cdots + t^{d-1}) \cdot a$.

e. En déduire que $\mathbb{Z}$ n'admet pas de résolution projective finie ; en d'autres termes, montrer que si

$$\cdots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to \mathbb{Z} \to 0$$

est une résolution projective de $\mathbb{Z}$, alors $P_n \neq 0$ pour tout $n \geq 0$.