Feuille d'exercices 1

Soit R un anneau associatif et unitaire.

Exercice 1. Soit M un R–module à gauche.

a. Montrer que $0_R \cdot m = 0_M$ pour tout $m \in M$.

b. Montrer que $r \cdot 0_M = 0_M$ pour tout $r \in R$.

c. Montrer que $(-1_R) \cdot m = -m$ pour tout $m \in M$.

Exercice 2. Soit M un R–module à droite. Soient $a \in R$ et $m \in M$ non-nul tels que $m \cdot a = 0_M$. Montrer que a ne possède pas un inverse à droite (c'est-à dire, il n'existe pas de $b \in R$ tel que $ab = 1_R$).

Exercice 3. Soient R et S deux anneaux et $\phi : S \to R$ un morphisme d'anneaux. Si M est un R–module à gauche, montrer que M est aussi un S–module à gauche si l'on définit

$$s \cdot m = \phi(s) \cdot m$$

pour tout $s \in S$ et pour tout $m \in M$.

Exercice 4. Soient N, N' deux sous-modules d'un R–module M.

a. Montrer que $N \cap N'$ est un sous-module de M.

b. Montrer que $N + N' = \{n + n' : n \in N, n' \in N'\}$ est un sous-module de M.

Exercice 5. Soit $f : M \to M'$ un morphisme de R–modules à gauche.

a. Montrer que $\ker(f) = \{m \in M : f(m) = 0\}$ est un sous-module de M.

b. Montrer que $\mathrm{im}(f) = \{f(m) \mid m \in M\}$ est un sous-module de M'.

c. Soit U' un sous-module de M'. Montrer que $f^{-1}(U')$ est un sous-module de M.

Exercice 6. ($\mathbb{R}[x]$–*modules.*) Soit $V = \mathbb{R}^2$. Rappler que V devient un $\mathbb{R}[x]$–module si l'on se donne une application linéaire $T : V \to V$.

a. Soit $T_1 : V \to V$ la rotation par $\pi/2$ dans le sens horaire autour de l'origine. Montrer que V et $\{0\}$ sont les seuls $\mathbb{R}[x]$–sous-modules de V.

b. Soit $T_2 : V \to V$ la projection sur la droite $x = 0$. Montrer que V, $\{0\}$, la droite $x = 0$ et la droite $y = 0$ sont les seuls $\mathbb{R}[x]$–sous-module de V.

c. Soit $T_3 : V \to V$ la rotation par π dans le sens horaire autour de l'origine. Montrer que tout sous-espace de V est $\mathbb{R}[x]$–sous-module de V.

Exercice 7.

a. Montrer que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

b. Montrer que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, où $d = (n, m)$.

Exercice 8. Soient $f : M \to N$ un morphisme de R–modules à gauche et K un sous-module de M tel que $K \subseteq \ker(f)$. Montrer que l'application $\widehat{f} : M/K \to N$ donné par $\widehat{f}(m + K) = f(m)$ est un morphisme de R–modules. *(Il faut montrer que $\widehat{f}$ est bien défini.)*