Feuille d'exercices 2

Soit R un anneau associatif et unitaire.

Exercice 1. Soit M un groupe abélien qui est à la fois un R-module à gauche et un R-module à droite tel que $rm = mr$ pour tout $r \in R$ et $m \in M$. Montrer que $(r_1 r_2)m = m(r_2 r_1)$ pour tout $m \in M$ et tous $r_1, r_2 \in R$.

Exercice 2. Soit M un R–module à droite. Montrer que M est simple ssi *pour tout* $m \in M$ non-nul, on a que $M = \{m \cdot a : a \in R\}$.

Exercice 3. Soit N un sous-module d'un R–module M. Montrer que si M/N et N sont de type fini, alors M est de type fini.

Exercice 4. Montrer que tout R-module est isomorphe à un quotient d'un R-module libre.

Exercice 5. (*Propriété universelle de* $\ker(f)$) Soit $f : M \to N$ un morphisme de R–modules. On montrera que le noyau K de f est uniquement déterminé par la propriété suivante :

(i) il existe un morphisme de R–modules $\ell : K \to M$ tel que $f \circ \ell = 0$; et

(ii) si $\ell' : K' \to M$ est un morphisme de R–modules tel que $f \circ \ell' = 0$, alors il existe un unique morphisme de R–modules $u : K' \to K$ tel que $\ell' = \ell \circ u$.

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\ell"] & M \arrow[r, "f"] & N \\ K' \arrow[u, dashed, "u"] \arrow[ur, "\ell'"'] & & \end{tikzcd}$$

Explicitement :

a. Montrer que le noyau de f vérifie les conditions (i) et (ii).

b. Montrer que si K est un R–module qui vérifie (i) et (ii), alors K est le noyau de f.

Exercice 6. Soient R un anneau commutatif, J un idéal de R, M un R-module et

a. Soit JM l'ensemble des combinaison linéaires finies de la forme $\sum_i j_i\, m_i$, où $j_i \in J$ et $m_i \in M$:
$$JM = \left\{ \sum_{\text{fini}} j_i\, m_i : j_i \in J, m_i \in M \right\}.$$
Montrer que JM est un sous-module de M.

b. Montrer que M/JM est un R/J-module si l'on définit :
$$(r + J) \cdot (m + JM) = rm + JM$$

c. Montrer que si $JM = \{0\}$, alors on peut munir M d'une structure de R/J–module.

d. En déduire que si J est un idéal maximal de R tel que $JM = \{0\}$, alors M est un espace vectoriel sur R/J.

e. Soient I un idéal maximal de R et F un R–module libre avec base B. Montrer que F/IF est un espace vectoriel sur R/I et que $\{b + IF : b \in B\}$ est une base de F/IF.

Exercice 7. Soient R un anneau intègre et Q son corps des fractions. Si A est un R–module, montrer que tout élément de $Q \otimes_R A$ est de la forme $q \otimes a$, où $q \in Q$ et $a \in A$.

Exercice 8. Montrer que $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}$.

Exercice 9.

a. Montrer que le tenseur élémentaire $2 \otimes 1 \in \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est nul.

b. Montrer que le tenseur élémentaire $2 \otimes 1 \in 2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est non-nul.

Exercice 10. Soit I l'idéal de $\mathbb{Z}[x]$ engendré par 2 et x. Remarquer que $\mathbb{Z}[x]/I \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

a. Montrer que l'application $\beta : I \times I \to \mathbb{Z}[x]/I$ définie par

$$\beta\left(p(x), q(x)\right) = \frac{p(0)}{2}\, q'(0)$$

est $\mathbb{Z}[x]$–bilinéaire.

b. En déduire qu'il existe un $\mathbb{Z}[x]$-morphisme $I \otimes_{\mathbb{Z}[x]} I \to \mathbb{Z}[x]/I$ donné par

$$p(x) \otimes q(x) \mapsto \frac{p(0)}{2}\, q'(0).$$

c. En déduire que $2 \otimes x \neq x \otimes 2$.

d. Montrer que le sous-module engendré par $2 \otimes x - x \otimes 2$ est isomorphe à $\mathbb{Z}[x]/I$.