Feuille d'exercices 3

Exercice 1. Soit R un anneau.

a. Montrer que l'application de $\psi : \mathrm{Hom}_R(R, M) \to M$ définie par $\psi(f) = f(1_R)$ est une isomorphismes de R-modules à gauche.

b. Montrer que l'application $\varphi : R \to \mathrm{End}_R(M)$ définie par $\varphi(r) = r\,\mathrm{Id}_M$, où Id_M est l'endomorphisme identité, est un morphisme d'anneaux.

c. En déduire que les R-algèbres $\mathrm{End}_R(R) = \mathrm{Hom}_R(R, R)$ et R sont isomorphes.

Exercice 2.

Pour un idéal I d'un anneau R et un entier $n \in \mathbb{N}$, on définit I^n comme l'ensemble des combinaison linéaire finie des éléments de la forme $i_1 \cdots i_n$, où $i_1, \ldots, i_n \in I$.

Soit R un anneau commutatif. Soit I un idéal de R tel que $I^n = \{0\}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Soit $\varphi : M \to N$ un R-morphisme. Montrer que si l'application $\bar{\varphi} : M/IM \to N/IN$ définie par $\bar{\varphi}(m + IM) = \varphi(m) + IN$ est sujective, alors φ est surjective.

Exercice 3. Soit R et S deux anneaux. Montrer les énoncés suivants.

a. Pour ${}_RA_S$ et ${}_RB$, $\mathrm{Hom}_R(A, B)$ est un S-module à gauche par $sf : a \mapsto f(as)$.

b. Pour ${}_RA_S$ et B_S, $\mathrm{Hom}_S(A, B)$ est un R-module à droite par $fr : a \mapsto f(ra)$.

c. Pour ${}_SB_R$ et A_R, $\mathrm{Hom}_R(A, B)$ et un S-module à gauche par $sf : a \mapsto s\,(f(a))$.

d. Pour ${}_SB_R$ et ${}_SA$, $\mathrm{Hom}_S(A, B)$ est un R-module à gauche par $fr : a \mapsto f(a)r$.

Exercice 4. Soit R un anneau. Soit M_R un R-module quelconque et ${}_RN$ un R-module libre avec base $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.

a. Montrer que tout élément de $M \otimes_R N$ s'exprime de façon unique sous la forme

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \otimes e_i, \text{ où } m_i \in M.$$

b. En déduire que si $\sum_{i=1}^{n} m_i \otimes e_i = 0$, alors $m_i = 0$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Exercice 5. Montrer que dans la catégorie **Ab**, les épimorphismes sont les morphismes surjectifs et les monomorphismes sont les morphismes injectifs.

Exercice 6. Soit $\mathscr{C}$ un catégorie.

- Un objet F de $\mathscr{C}$ est un *objet final* si, pour tout $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, il existe un unique morphisme $X \to F$.
- Un objet I de $\mathscr{C}$ est un *objet initial* si, pour tout $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, il existe un unique morphisme $I \to X$.
- Un objet N de $\mathscr{C}$ est un *objet nul* si N est à la fois initial et final.

a. Montrer qu'un objet initial est unique à isomorphisme près.

b. Montrer qu'un objet final est unique à isomorphisme près.

c. Soit $\mathscr{C}$ une catégorie avec un objet nul. Montrer que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y) \neq \emptyset$ pour tous $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$.

d. Montrer que **Gr**, $\mathbf{Ann}_1$, $\mathbf{Ev}_{\mathbb{R}}$ et $\mathbf{Mat}_{\mathbb{R}}$ contiennent des objets nuls.

e. Montrer que **Ens** a un objet initial et un objet final, mais pas d'objet nul.

Exercice 7.

Le groupe dérivé *d'un groupe G est le sous-groupe de G engendré par les éléments de la forme $ghg^{-1}h^{-1}$:*

$$G' = \langle ghg^{-1}h^{-1} : g, h \in G \rangle.$$

Il est un sous-groupe normal de G et le groupe quotient G/G' est abélien.

Soient **Gr** la catégorie des groupes et **Ab** la catégorie des groupes abéliens.

a. Montrer que la correspondance

$$\begin{array}{ccc} G & \longmapsto & G/G' \\ \left(G \xrightarrow{\varphi} H\right) & \longmapsto & \left(G/G' \xrightarrow{\bar{\varphi}} H/H'\right) \end{array}$$

où $\bar{\varphi}(gG') = \varphi(g)H'$ pour tout $g \in G$, définit un foncteur $Ab : \mathbf{Gr} \to \mathbf{Gr}$. (En fait, Ab prend valeurs dans **Ab**.)

Exercice 8. Montrer que, pour le monomorphisme $j : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, le morphisme induit $j \otimes 1 : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est nul.