# Feuille d'exercices 4

**Exercice 1.** Soit $f : A \longrightarrow B$ un morphisme de $R$–modules à gauche. Montrer que $f$ est injectif ssi le morphisme $f^* : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(B, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est surjectif.

**Exercice 2.** Soit $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0$ une suite exacte de $R$–modules à gauche. Montrer que si $A$ et $C$ sont de type fini, alors $C$ est de type fini.

**Exercice 3.** Soient $R$ un anneau intègre et $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0$ une suite exacte courte de $R$–modules. Montrer que si $A$ et $C$ sont des modules de torsion, alors $B$ est de torsion.

**Exercice 4.** Soient $f : A \to B$ et $g : B \to C$ deux $R$–morphismes. Montrer que l'on a une suite exacte

$$0 \to \ker(f) \to \ker(g \circ f) \to \ker(g) \to \mathrm{coker}(f) \to \mathrm{coker}(g \circ f) \to \mathrm{coker}(g) \to 0$$

**Exercice 5.**

*a.* Soient $P \xrightarrow{g} N$ et $M \xrightarrow{f} N$ deux morphismes dans ${}_R\mathrm{Mod}$ où $P$ est projectif. Montrer qu'il existe $P \xrightarrow{h} M$ dans ${}_R\mathrm{Mod}$ tel que $f \circ h = g$ ssi $\mathrm{im}(g) \subseteq \mathrm{im}(f)$.

*b.* Énoncer et prouver le dual de la partie précédente.

*c.* Soit un diagramme commutatif de ${}_R\mathrm{Mod}$

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\alpha_2"] & A_2 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\varphi_2"] & A_1 \arrow[d, "\varphi_1"] \\
B_3 \arrow[r, "\beta_2"] & B_2 \arrow[r, "\beta_1"] & B_1
\end{tikzcd}$$

avec $P$ projectif, $\alpha_1 \circ \alpha_2 = 0$, et la ligne du bas exacte en $B_2$. Trouver un morphisme $P \xrightarrow{\varphi_3} B_3$ qui rend le diagramme commutatif.

**Exercice 6.** Soit $G$ un groupe abélien.

*a.* Montrer que le foncteur $T = \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(G, -)$ est exact à gauche.

*b.* Montrer que le foncteur (covariant) $E = \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(G, -)$ est exact à droite.

*c.* Montrer que le foncteur contravariant $F = \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(-, G)$ est exact à droite.