Devoir 1

à remettre le 19 février 2014

Exercice 1. Soient G un groupe fini agissant sur un ensemble E et $x \in E$.

a. Soit H est un sous-groupe de G. Montrer que

$$|\mathrm{Orb}_G(x)|\,[\mathrm{Stab}_G(x) : \mathrm{Stab}_H(x)] = [G : H]\,|\mathrm{Orb}_H(x)|\,.$$

b. Soient p un nombre premier, $m \in \mathbb{N}$, et P un p–sous-groupe de Sylow de G. Montrer que si p^m divise $|\mathrm{Orb}_G(x)|$, alors p^m divise $|\mathrm{Orb}_P(x)|$.

c. Soient P un p–sous-groupe de Sylow de G et p^m la plus grande puissance de p qui divise $|\mathrm{Orb}_G(x)|$. Montrer qu'il existe $y \in \mathrm{Orb}_G(x)$ tel que $|\mathrm{Orb}_P(y)| = p^m$.

Exercice 2. Soit G un groupe d'ordre $340 = 2^2 \cdot 5 \cdot 17$.

a. Montrer que G possède un sous-groupe abélien d'ordre 4.

b. Montrer que G possède un sous-groupe normal d'ordre 5.

c. Montrer que G possède un sous-groupe normal d'ordre 17.

d. Montrer que G possède un sous-groupe d'ordre 85 qui est monogène et normal dans G.

Exercice 3. Soient $G = \langle x, y \mid x^3, y^5, (xy)^2 \rangle$ et $H = \langle x, yx^{-1}y^2 \rangle$.

a. Montrer que $[G : H] = 5$.

b. Soient $a = x$ et $b = yx^{-1}y^2$ les générateurs de H. Montrer que $a^3 = b^3 = (ab)^2 = 1$.

c. Montrer que $|H| \leq 12$. *(Considérer le groupe $\langle \alpha, \beta \mid \alpha^3, \beta^3, (\alpha\beta)^2 \rangle$ avec sous-groupe $\langle \alpha \rangle$.)*

d. Etant donné que le groupe alterné A_5 est engendré par les cycles $(1, 2, 3)$, $(2, 3, 4)$ et $(3, 4, 5)$, montrer que $G \cong A_5$.