Devoir 2

à remettre le 26 mars 2014

Exercice 1. Soit G le groupe donné par la présentation $G = \langle a, b \mid a^4, b^2, b^{-1}aba \rangle$.

a. Montrer qu'il existe une représentation $Y : G \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ de G telle que

$$Y(a) = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y(b) = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

b. Trouver toutes les matrices T telles que $T\,Y(g) = Y(g)\,T$ pour tout $g \in G$.

c. Déterminer si la représentation Y est irréductible.

d. Décomposer le G-module associé à Y en somme directe de sous-modules simples.

Exercice 2. Soient G un groupe fini et $X : G \to \mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$ une représentation matricielle de G. Soit P la matrice

$$P = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} X(h).$$

a. Montrer que $X(g)P = PX(g) = P$ pour tout $g \in G$.

b. Montrer que la transformation linéaire induite par P est une projection avec image

$$\{v \in \mathbb{C}^d : X(g)v = v \text{ pour tout } g \in G\}.$$

c. Soit X une représentation irréductible. Montrer que si X n'est pas isomorphe à la représentation triviale, alors P est la matrice nulle.

Exercice 3. Soient G un groupe fini et V un G-module sur $\mathbb{C}$ tel que $\dim(V) \neq 0$.

a. Soit $H \leq G$. Expliquer pourquoi on peut considérer V comme H-module.

b. Soit H un sous-groupe *abélien* de G. Montrer qu'il existe $u \in V$, $u \neq 0$, tel que

$$hu \in \mathbb{C}u \quad \text{pour tout } h \in H. \tag{1}$$

c. Soient $G/H = \{g_1H, g_2H, \ldots, g_rH\}$ les classes à gauche modulo un sous-groupe H et $u \in V$ un vecteur non-nul vérifiant la condition (1). Montrer que

$$U = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{g_iu : 1 \leq i \leq r\}$$

est un sous-G-module de V.

d. Montrer que si V est un G-module simple et H est un sous-groupe abélien de G, alors

$$\dim(V) \leq \big|G/H\big|.$$

Exercice 4. Soient G un groupe fini, $X : G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ une représentation matricielle de G et ψ un caractère linéaire de G.

a. Montrer que l'application $\psi \odot X : G \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ définie par

$$(\psi \odot X)(g) = \psi(g)X(g),$$

pour tout $g \in G$, est une représentation de G.

b. Soient χ_X le caractère de X et $\chi_{\psi\odot X}$ le caractère de $\psi \odot X$. Montrer que

$$\chi_{\psi\odot X}(g) = \psi(g)\,\chi_X(g)$$

pour tout $g \in G$.

c. Montrer que $\psi \odot X$ est irréductible si et seulement si X est irréductible.