Devoir 3

à remettre le 11 avril 2014 *avant 17h00*

Exercice 1. Cet exercice a pour but le calcul de la table de caractères du groupe A_4.

a. Calculer les classes de conjugaison du groupe alterné A_4.

b. Calculer le sous-groupe dérivé de A_4 et montrer qu'il est isomorphe au groupe de Klein.

c. Utiliser le sous-groupe dérivé pour calculer les caractères linéaires de A_4.

d. En déduire qu'il existe un seul caractère irréductible non-linéaire de A_4.

e. Calucler le caractère irréductible non-linéaire de A_4 en utilisant *trois méthodes différentes* :

1. à l'aide de la représentation régulière de A_4 ;
2. à l'aide des relations d'orthogonalité ;
3. à l'aide d'une représentation de S_4.

f. Donner la table de caractères de A_4.

Exercice 2. Voici quelques entrées de la table de caractères d'un certain groupe fini G :

g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
6	2	0	0	-1	-1
7	-1	-1	1	0	0
?	?	?	-1	?	?
3	-1	1	0	α	$\overline{\alpha}$

où $\alpha = \frac{i\sqrt{7}-1}{2}$ et $g_1, g_2, \ldots, g_6$ sont des représentants des classes de conjugaison de G.

a. Complèter la table de caractères de G.

b. Calculer la dimension de toute représentation irréductible de G.

c. Calculer la cardinalité de G.

d. Calculer la cardinalité de toute classe de conjugaison de G.

e. Calculer le centre de G.

f. Calculer le sous-groupe dérivé de G.

g. Calculer les sous-groupes normaux de G.

h. Déterminer si G est commutatif.

i. Déterminer si G est simple.

Exercice 3. Soient G un groupe fini non-abélien d'ordre 8 et G' son sous-groupe dérivé.

a. Montrer que G possède un caractère irréductible unique χ d'ordre différent de 1.

b. Montrer que $\chi(e) = 2$.

c. Montrer que $\chi(g) = -2$ pour $g \in G' \setminus \{e\}$.

d. Montrer que $\chi(h) = 0$ pour $h \in G \setminus G'$.

Attention : Il est interdit d'utiliser une classification des groupes d'ordres 8 *!*

Exercice 4. Soient G un groupe fini, $Z(G)$ son centre, et $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_k$ les caractères irréductibles de G.

a. Montrer que

$$Z(G) = \left\{ g \in G : \sum_{i=1}^{k} \chi_i(g)\chi_i(g^{-1}) = |G| \right\}.$$

b. Montrer que

$$Z(G) = \bigcap_{i=1}^{k} \{ g \in G : |\chi_i(g)| = \chi_i(e) \}.$$